УДК 519

Использование пакетов прикладных программ в исследовании гладких кривых

Самыкова А.А., Хромова О.П.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
a_ samykova@mail.ru, khromova.olesya@gmail.com

Аннотация

В работе освящен вопрос использования систем компьютерной математики при исследовании гладких регулярных кривых. В системах прикладных программ Maxima и SageMath разработаны алгоритмы, позволяющие вычислять кривизну и кручение кривой по заданным входным параметрам – векторному уравнению кривой.

Ключевые слова: кривизна кривой, кручение кривой, Maxima, SageMath.

1. Общие сведения

Пусть γ – некоторая регулярная кривая класса C^3 в $\mathbb{R}^3$. Возьмем на ней фиксированную точку P_0 и произвольную точку P_1. Обозначим через τ_0 и τ_1 касательные векторы к γ в точках P_0 и P_1 соответственно. Пусть Δs – длина дуги P_0P_1 кривой γ, а $\Delta\theta$ – угол между векторами τ_0 и τ_1 (см., например, [1, 2]).

Определение 1. *Предел* $\lim\limits_{P_0\to P_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \lim\limits_{\Delta s\to 0} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$, *если он существует, называется кривизной кривой* γ *в точке* P_0 *и обозначается* k_1.

Теорема 1. *Если* γ *— регулярная дважды непрерывно дифференцируемая кривая, то в каждой ее точке существует кривизна, и если* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ *– ее параметризация, то*

$$k_1 = \frac{|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|}{|\mathbf{r}'|^3}. \tag{1}$$

Будем считать, что кривизна k_1 отлична от нуля в точке P_0. Тогда, по непрерывности, кривизна кривой γ отлична от нуля в некоторой окрестности точки P_0. Возьмем произвольную точку P_2 в этой окрестности. Известно, (см., например, [1, 2]), что в точках P_0 и P_2 существуют единственные соприкасающиеся плоскости α_0 и α_2. Обозначим угол между ними через $\Delta\theta$, а длину дуги P_0P_2 кривой γ – через Δs.

Определение 2. *Предел* $\lim\limits_{P_0\to P_2} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \lim\limits_{\Delta s\to 0} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$, *если он существует, называется абсолютным кручением кривой* γ *в точке* P_0 *и обозначается* k_2.

Теорема 2. *Если* γ *– регулярная кривая класса* C^3, *то в каждой ее точке , в которой кривизна отлична от нуля, существует абсолютное кручение* k_2, *и если* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ *– ее параметризация, то*

$$k_2 = \frac{|(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')|}{|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|^2}. \tag{2}$$

Таким образом, для вычисления кривизны и кручения кривой γ необходимо реализовать следующую математическую модель.

1. Задать вектор-функцию $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{t}) = \{x(t), y(t), z(t)\}$.
2. Найти производные $\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}'''$.
3. Определить произведения производных вектор-функции, присутствующих в вычислительных формулах (1) и (2).
4. Вычислить кривизну k_1 или кручение k_2 по формулам (1) и (2) соответственно.

По построенной математической модели в средах пакетов прикладных программ Maxima и SageMath разработаны процедуры, позволяющие рассчитывать кривизну и кручение кривой.

2. Вычисление кривизны и кручения кривой в Maxima

Рассмотрим реализацию программ в пакете Maxima, позволяющую вычислять кривизну и кручение кривой в случае произвольной параметризации $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{t})$.

Зададим вектор-функцию. Например, для винтовой линии это осуществляется так:

```
r:[cos(t),sin(t),t];
```

Найдем для неё первую, вторую и третью производную радиус-вектора:

```
db:[diff(r[1],t,1),diff(r[2],t,1),diff(r[3],t,1)];
db2:[diff(r[1],t,2),diff(r[2],t,2),diff(r[3],t,2)];
db3:[diff(r[1],t,3),diff(r[2],t,3),diff(r[3],t,3)];
```

Вычисление кривизны кривой по формуле (1) произведем в три этапа.

Этап 1. Введем процедуры для вычисления модуля векторного произведения первой и второй производной:

```
v:db~db2;
v1:express(%);
v2:trigsimp(v1);
v3:v2.v2;
v4:v3^(1/2);
v5:trigsimp(v4);
```

Этап 2. Создадим процедуру вычисления для знаменателя $|\mathbf{r}'|^3$:

```
v6:db.db;
v7:v6^(1/2);
v8:v7^3;
v9:trigsimp(v8);
```

Этап 3. Согласно формуле (1) получим результат – кривизну кривой.

```
k:v5/v9;
```

Аналогично, используя формулу (2), найдем кручение кривой в три шага.

Шаг 1. Разработаем процедуру вычисления смешанного произведения первых трех производных радиус-векторов кривых $(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')$ как композицию скалярного произведения и векторного произведения $([\mathbf{r}', \mathbf{r}''], \mathbf{r}''')$:

```
v:db~db2;
v1:express(%);
v2:trigsimp(v1);
v3:v2.db3;
v4:trigsimp(v3);
```

Шаг 2. Далее находим квадрат длины векторного произведения векторов $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$:

```
c:db~db2;
c1:express(c);
c2:c1.c1;
c3:trigsimp(c2);
```

Шаг 3. По формуле (2) получаем кручение кривой:

```
k:v4/c3;
```

3. Определение кривизны и кручения кривой в SageMath

Опишем процедуру для нахождения кривизны гладкой регулярной кривой в системе компьютерной математики SageMath с входными данными – вектор-функцией кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{t})$.

При работе с векторами необходимо задать алгебраическую структуру (кольцо рациональных чисел), благодаря которой можно будет создавать объекты, соответствующие элементам этой структуры.

```
R.<t>=PolynomialRing(QQ)
```

Зададим вектор-функцию кривой. Например, для винтовой линии это осуществляется так:

```
r=vector([cos(t),sin(t),t])
```

Определим первую, вторую и третью производную радиус-вектора:

```
dr1=diff (r,t,1)
dr2=diff (r,t,2)
dr3=diff (r,t,3)
```

Вычисление кривизны кривой по формуле (1) произведем в три этапа.

Этап 1. Введем процедуры для вычисления векторного произведения $|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|$:

```
vec = dr1.cross_product(dr2)
skal = var ('skal')
skal = vec.dot_product(vec)
k1 = sqrt(skal)
```

Упростим выражение тригонометрической функцией и выведем на экран значение числителя:

```
K1 = k1.simplify_trig()
print('K1 =',K1)
```

Этап 2. Разработаем процедуру вычисления для знаменателя $|\mathbf{r}'|^3$:

```
vec2 = var ('vec2')
vec2 = dr1.dot_product(dr1)
k2 = sqrt(vec2)^3
K2 = k2.simplify_trig()
print('K2 =',K2)
```

Этап 3. По формуле (1) получим результат – кривизну кривой.

```
k = K1/K2
K = k.simplify_trig()
print('K =',K)
```

Аналогично, используя формулу (2), найдем кручение кривой в три шага.

Шаг 1. Разработаем процедуру вычисления смешанного произведения $(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')$ как композицию скалярного произведения и векторного произведения $([\mathbf{r}', \mathbf{r}''], \mathbf{r}''')$:

```
vec = dr1.cross_product(dr2)
k1 = vec.dot_product(dr3)
K1 = k1.simplify_trig()
print('K1 =',K1)
```

Шаг 2. Далее находим квадрат длины векторного произведения векторов $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$:

```
vec2 = dr1.cross_product(dr2)
skal = var ('skal')
skal = vec2.dot_product(vec2)
k2 = sqrt(skal)^2
K2 = k2.simplify_trig()
print('K2 =',K2)
```

Шаг 3. По формуле (2) вычисляем кручение кривой:

```
k = K1/K2
K = k.simplify_trig()
print('K =',K)
```

4. Заключение

В работе приводится математическая модель, позволяющая вычислять кривизну и кручение регулярной кривой γ. На основе данной модели в средах свободно распространяемых пакетов прикладных программ Maxima и SageMath разработаны соответствующие компьютерные модели, осуществляющие поиск кривизны и кручения кривой по предложенной вектор-функции – векторному параметрическому уравнению кривой. Апробация указанных моделей осуществлена на примере винтовой линии.

Список литературы

1. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. Учебное пособие / Под ред. А.Ф. Лапко. — М. : Наука, 1974. — 176 с.

2. Топоногов В.А. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей: учебное пособие для вузов. — М. : Физматкнига, 2012. — 224 с.