УДК 514. 01.

О единственности меры длины отрезка

Поликанова И.В.
Алтайский государственный педагогический университет, г. Барнаул
Anirix1@yandex.ru

Аннотация

The article proposes a new detailed justification of the "uniqueness of a measure" arising from a deeper statement: all 2 measures of the length of a segment are proportional. Thus, it is more correct to speak not about the uniqueness of a measure - there are infinitely many measures - but about the unambiguous definiteness of a measure by its value on one single segment. The proof dispenses with the axiom of the existence of a unit length segment.

Ключевые слова: мера длины отрезка в евклидовой геометрии.

1. Введение

В статье приводится детальное доказательство единственности меры длины отрезка в евклидовой геометрии, основанной на системе аксиом Гильберта [1]. Обоснования, представленные в учебной литературе [2–5] сжаты и существенно опираются на единственность меры на классе отрезков, являющихся рациональными частями эталона, о чём умалчивается как о само собой разумеющемся факте. Игнорируется сама возможность зависимости меры от точки отсчёта, в частности, от выбора конца отрезка, с которого начинается измерение. Но если для отрезков, кратных эталону при измерении с одного конца, кажется прозрачным, что укладывание эталона с другого конца даст то же самое целое число, то в остальных случаях это совсем не очевидно. Имеются и другие моменты, чреватые нарушением единственности меры, на которые авторы учебников не акцентируют внимание своих читателей. Разбор их представлен в 3-ем разделе статьи. В разделе 5 приводится строгое доказательство единственности меры, отличное от приведённых в [2–5] и опирающееся на свойства рациональных частей отрезка (раздел 4). Единственность вытекает из более общего утверждения *о пропорциональности всяких двух мер отрезка.* Поэтому правильнее говорить не о единственности меры – мер бесконечно много, – а об однозначной определённости меры её значением на одном единственном отрезке: *две меры, принимающие одинаковые значения на некотором отрезке, совпадают.* При этом аксиома существования отрезка единичной длины оказывается невостребованной.

2. Используемые факты

Теория измерения отрезка в абсолютной геометрии обосновывается первыми четырьмя группами системы аксиом Гильберта [1]. Причём, из двух аксиом 4-ой группы для доказательства теорем существования и единственности меры достаточно (вкупе с аксиомами первых трёх групп) аксиомы Архимеда. Для удобства читателей ниже мы приведём список используемых аксиом, утверждений и понятий, не придерживаясь буквы какого-либо одного источника, а передавая их суть в удобной символике. Обозначения в разных источниках отличаются. Мы будем применять более привычные нам обозначения из современных учебников по геометрии [2]. Ссылки преимущественно будем делать на наиболее полный, на наш взгляд, труд [3]. Точки будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита, а прямые – строчными. Равество точек понимается как их совпадение.

Напомним, что для трёх точек прямой рассматривается отношение, обозначаемое $A - B - C$ и произносимое *“точка B лежит между точками A и C,”* смысл которого раскрывается в предложениях:

Аксиома II_1. *Если $A - B - C$, то A, B, C – различные точки одной прямой, и $C - B - A$.*

Аксиома II_2. *Для любых двух точек A, B существует по крайней мере одна точка C, такая, что $A - B - C$.*

Аксиома II_3. *Из трёх различных точек одной прямой не более чем одна может лежать между двумя другими.*

Предложение 1. [3, теор. 9.1.] *Для любых двух точек A, C существует по крайней мере одна точка B, такая, что $A - B - C$.*

Предложение 2. [3, теор. 9.2.] *Среди трёх произвольных различных точек прямой по крайней мере одна лежит между двумя другими.*

Предложение 3. [3, теор. 9.3.] *Если точки A, B, C, D таковы, что $A - B - C$ и $B - C - D$, то A, B, C, D – различные точки одной прямой, и также $A - B - D$* и *$A - C - D$.*

Предложение 4. [3, теор. 9.4.] *Если точки A, B, C, D таковы, что $A - B - C$ и $A - C - D$, то A, B, C, D – различные точки одной прямой, и также $A - B - D$* и *$B - C - D$.*

Предложение 5. *Если точки A, B, C, D таковы, что $A - B - C$ и $B - D - C$, то A, B, C, D – различные точки одной прямой, и также $A - B - D$* и *$A - D - C$.*

Доказательство. Вытекает из предл. 4 на основании аксиомы II_1 :

$$(A - B - C) \wedge (B - D - C) \quad \Rightarrow \quad (C - B - A) \wedge (C - D - B) \quad \Rightarrow \quad (D - B - A) \wedge (C - D - A) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (A - B - D) \wedge (A - D - C). \qquad \square$$

Предложение 6. [4, теор. 8б.] *Если $A - C - B$ и $A - D - B$, то либо $D = C$, либо $A - D - C$, либо $C - D - B$.*

На основе понятия “лежать между” формулируются производные понятия [3, §9]:

точки A, B одной прямой лежат по одну сторону от точки O этой же прямой, если неверно, что $A - O - B$;

точки A, B одной прямой лежат по разные стороны от точки O этой же прямой, если $A - O - B$;

отрезок $[AB]$ – множество точек, состоящее из точек A, B и всех точек, лежащих между ними;

луч $[AB)$ *с вершиной* A – множество точек, состоящее из точек A и всех точек, лежащих по одну сторону с B от точки A; не зависит от выбора точки на нём [3, теор.9.12]

одинаково ориентированные лучи $[AB)$ *и* $[A'B')$ – лучи одной прямой такие, что все точки одного из них принадлежат другому, обозначение: $[AB) \uparrow\uparrow [A'B')$;

противоположно ориентированные лучи $[AB)$ *и* $[A'B')$ – лучи одной прямой, не являющиеся одинаково ориентированными, обозначение: $[AB) \uparrow\downarrow [A'B')$.

дополнительные лучи – различные лучи с общей вершиной на одной прямой.

Предложение 7. [3, теор. 9.13.] *Пусть точка O принадлежит прямой a. Тогда всякая точка прямой a, отличная от O, принадлежит одному из двух дополнительных лучей с* *вершиной O. Если отличные от O точки A и B прямой a принадлежат дополнительным лучам с вершиной O, то $A - O - B$.*

Предложение 8. [3, теор. 9.16.] *Одинаковая ориентированность лучей одной прямой является отношением эквивалентности.*

В силу этого предложения, если лучи $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ попарно одинаково ориентированы, то допустимо обозначение $\hat{a} \uparrow\uparrow \hat{b} \uparrow\uparrow \hat{c}$.

Предложение 9. [3, следствие 2, с. 59] *Дополнительные лучи противоположно ориентированы.*

Предложение 10. $[AB) \uparrow\downarrow [BA)$.

Доказательство. Лучи противоположно ориентированы, если каждый из них содержит точку, не принадлежащую другому лучу. По аксиоме II_2 для всяких двух точек A и B найдутся точки C, D, такие, что $A-B-C$ и $B-A-D$. Точка C принадлежит лучу $[AB)$, но не принадлежит лучу $[BA)$. Точка D принадлежит лучу $[BA)$, но не принадлежит лучу $[AB)$. Следовательно. $[AB) \uparrow\downarrow [BA)$. □

Предложение 11. [3, теор. 9.14.] *Для того, чтобы 2 луча одной прямой были одинаково ориентированы, необходимо и достаточно, чтобы они имели общую точку, отличную от вершин этих лучей, а их вершины совпадали или лежали бы по одну сторону от этой точки.*

Предложение 12. [3, теор. 9.17, 9.19.] *Для лучей $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ справедливо:*
1) *если $\hat{a} \uparrow\uparrow \hat{b}$ и $\hat{a} \uparrow\downarrow \hat{c}$, то $\hat{b} \uparrow\downarrow \hat{c}$;*
2) *если $\hat{a} \uparrow\downarrow \hat{c}$ и $\hat{b} \uparrow\downarrow \hat{c}$, то $\hat{a} \uparrow\uparrow \hat{b}$;*

Предложение 13. $A - B - C \quad \Rightarrow \quad [AB) \uparrow\uparrow [AC)$.

Доказательство. Лучи $[AB)$ и $[AC)$ совпадают. По предл. 8. $[AB) \uparrow\uparrow [AC)$. □

Предложение 14. $A - B - C \quad \Leftrightarrow \quad [AB) \uparrow\uparrow [BC)$.

Доказательство. Пусть $A-B-C$. Так как точка C принадлежит лучам $[AB)$ и $[BC)$, и точки A, B лежат по одну сторону от C, то по предложению 11 справедливо: $[AB) \uparrow\uparrow [BC)$.

Пусть $[AB) \uparrow\uparrow [BC)$. По предложению 10 имеем: $[AB) \uparrow\downarrow [BA)$. В силу предложения 12(1) выполняется: $[BC) \uparrow\downarrow [BA)$. Лучи $[BC)$, $[BA)$ дополнительные. По предложению 7 справедливо: $A - B - C$. □

Аксиомы III-ей группы, выражают свойства отношения *"конгруэнтности" отрезков* (и углов), обозначаемого знаком $=$.

Аксиома III_1. *Для любого отрезка $[AB]$ и любого луча с вершиной A' найдётся точка B', принадлежащая этому лучу, такая, что $[AB] = [A'B']$.*

Аксиома III_2. *Если $[A'B'] = [AB]$ и $[A''B''] = [AB]$, то $[A'B'] = [A''B'']$.*

Аксиома III_3. *Если $A - B - C$, $A' - B' - C'$ и $[AB] = [A'B']$, $[BC] = [B'C']$, то $[AC] = [A'C']$.*

В большинстве источников в аксиому III_1 включают требование $[AB] = [BA]$ для каждого отрезка $[AB]$ [1, 3, 4]. Авторы учебника [2] сочли возможным его вообще опустить, считая достаточным при введении понятия отрезка как пары точек равнозначными обозначения $[AB]$ и $[BA]$. Нам кажется более правильным ввиду значимости данного утверждения вынести его в отдельную аксиому, как это осуществлено в [6]. У нас это будет аксиома III_0.

Аксиома III_0. *Для всякого отрезка* $[AB]$ *справедливо* $[AB] = [BA]$.

Из всего комплекса аксиом $I - III$ выводятся следующие утверждения:

Предложение 15. [3, теор. 16.2 - 16.4.] *Отношение конгруэнтности отрезков является эквивалентностью.*

Предложение 16. [3, теор. 16.5.] *Для любого отрезка* $[AB]$ *и любого луча с вершиной* A' *существует единственная точка* B', *принадлежащая этому лучу, такая, что* $[AB] = [A'B']$.

Предложение 17. [3, теор. 16.6.] (*О сохранении порядка точек в конгруэнтных системах.*) *Если* $A - B - C$, *а точки* B', C' *лежат по одну сторону от* A', $[AB] = [A'B']$, $[AC] = [A'C']$, *то* $A' - B' - C'$ *и* $[BC] = [B'C']$.

Производные понятия:

– *середина отрезка* $[AB]$ – лежащая на прямой AB точка O, для которой выполняется: $[AO] = [OB]$; каждый из отрезков $[AO]$, $[OB]$ будем называть *половиной отрезка* $[AB]$;

– *отрезок* $[AB]$ *больше отрезка* $[A'B']$ или, что то же самое, *отрезок* $[A'B']$ *меньше отрезка* $[AB]$, – если существует точка $\tilde{B}$, такая, что $[AB] = [A\tilde{B}]$ и $A - \tilde{B} - B$; соответствующие обозначения: $[AB] > [A'B']$ и $[A'B'] < [AB]$.

Предложение 18. [3, теор. 19.3, 19.1.] *У всякого отрезка* $[AB]$ *существует единственная середина* O, *причём,* $A - O - B$.

Предложение 19. [3, теор. 17.3.] *Для любых двух неконгруэнтных отрезков* $[AB]$ *и* $[A'B']$ *всегда справедливо одно из соотношений* $[AB] < [A'B']$ *или* $[AB] > [A'B']$.

Предложение 20. [3, теор. 17.1.]

$$[AB] = [A'B'],\ \ [CD] = [C'D'],\ \ [AB] > [CD] \ \ \Rightarrow\ \ [A'B'] > [C'D'].$$

Предложение 21. [3, теор. 17.4.]

$$[AB] > [A'B'],\ \ [A'B'] > [A''B''] \ \ \Rightarrow\ \ [AB] > [A''B''].$$

Предложение 22. [3, теор. 17.5.] $(A - C - B) \wedge (A - D - B) \wedge (C \neq D) \ \ \Rightarrow\ \ [AB] > [CD]$.

В дальнейшем через $\mathbb{N}_0$ будем обозначать множество натуральных чисел с нулём.

Аксиома IV_1. (Архимеда) *Для всяких отрезков* $[AB]$ *и* $[PQ]$ *на луче* $[AB)$ *существует последовательность точек*

$$A = A_0, A_1, ..., A_n, ... \qquad (1)$$

удовлетворяющая условиям:

1) $A_{i-1} - A_i - A_{i+1},\ \ i = 1, 2, ...$

2) $[A_{i-1}A_i] = [PQ]$, $i = 1, 2, ...$

3) $A - B - A_n$ *для некоторого* $n \in \mathbb{N}_0$.

3. Пробелы в обосновании теории измерения отрезков

Изучение измерения дуг орбит однопараметрической группы преобразований G [7] привело автора к мысли, что процесс измерения естественнее описать в терминах ориентированных дуг или, короче, ордуг. Подтверждение целесообразности такого подхода позже автор обнаружил в сочинении В.Ф. Кагана [6], рассматривавшего сначала измерение отрезков на *ориентированной прямой*, и лишь затем на *двусторонней прямой*. На орбите возможно введение структуры, напоминающей евклидову прямую с отношениями "лежать между" для трёх точек и конгруэнтностью ордуг, определяемой условием: две ордуги конгруэнтны, если могут быть переведены одна в другую в результате преобразования группы G [7]. Выяснилось, что мера ордуги, определяемая теми же аксиомами, что и мера длины отрезка, расщепляется на 2 независимые меры, каждая из которых определена на классе одинаково ориентированных ордуг однозначно заданием эталона в каждом из этих классов. При этом противоположно ориентированные ордуги оказываются несравнимыми. Чтобы сделать возможным измерение ордуг любой ориентации одним эталоном, автор расширил понятие конгруэнтности, введя понятие λ*-конгруэнтных* ордуг, где λ – произвольное фиксированное действительное отрицательное число. В классах ордуг одной ориентации λ-конгруэнтность совпадает с определённой выше конгруэнтностью, а две ордуги разной ориентации λ-конгруэнтны, если положительно ориентированная ордуга равна отрицательно ориентированной ордуге, умноженной на число λ. (Смысл нововведения заключается в том, что при переходе от одной ориентации к другой происходит растяжение либо сжатие ордуг.) Отношение λ-конгруэнтности удовлетворяет аксиомам $III_1 - III_3$, а аксиоме III_0 лишь при $\lambda = -1$. В итоге две противоположные ордуги AB и BA (разумеется, не λ-конгруэнтные при $\lambda \neq -1$) имеют разные меры! В построенной теории измерения ордуг эталон с разных концов дуги $[AB]$ укладывается неодинаковое число раз. Это легко понять, если измерять расстояние, проходимое теплоходом по течению и против течения реки в часах: эталоном будет служить скорость. Время прохождения одного и того же расстояния вверх и вниз по течению реки будет неодинаково. Данные результаты подводят к мысли о важности аксиомы III_0 в обосновании независимости измерения от точки отсчёта и необходимости эту самую независимость обосновывать.

Авторы учебников [2–5] не сочли нужным обратить внимание читателя на те моменты, где логически (гипотетически) может возникнуть неоднозначность в процессе измерения отрезка $[a]$ эталоном $[p]$. Это:

1) независимость сравнения двух отрезков от конца отрезка, к которому "прикладывается" второй из них;

2) единственность бесконечной последовательности точек (1) в аксиоме Архимеда;

3) единственность натурального числа n такого, что

$$n[p] \leq [a] < (n+1)[p]; \tag{2}$$

4) независимость результата измерения отрезка от конца, с которого начинается откладывание эталона;

5) независимость результата измерения отрезка от "точки отсчёта."

Остановимся на них подробнее. Прежде всего, заметим, что, равные по одному отношению объекты по другому отношению эквивалентности могут различаться. Например, совпадающие как множества, ордуги AB и BA не λ-конгруэнтны. И потому аксиома III_0 должна быть явно сформулирована.

1) *Корректность введения сравнения отрезков* обосновывается теоремой 1.

Теорема 1. *Пусть $A - C - B$, точка $\tilde{C}$ принадлежит лучу $[BA)$ и $[B\tilde{C}] = [AC]$. Тогда $B - \tilde{C} - A$.*

Доказательство. Утверждение вытекает из предложения 17 о сохранении порядка точек в конгруэнтных системах и аксиомы III_0. □

Заметим, что для ордуг с λ-конгруэнтностью теорема о сохранении порядка точек в конгруэнтных системах также справедлива. Однако, ввиду того, что ордуги AB и BA не λ-конгруэнтны теорема 1 не имеет места.

2) Что касается *аксиомы Архимеда*, то она, в приведённой выше формулировке [1–4] не совсем корректна, потому как её суть заключается не в существовании последовательности точек (1), удовлетворяющей условиям 1) и 2), – этот факт обосновывается, – а в том, что для любой такой последовательности точек (на самом деле она единственна) отрезок $[AB]$ обязательно "покроется" одним из отрезков $[AA_n]$. Подтверждение данной точки зрения можно найти в [6], где приводится цитата из сочинения Архимеда "О сфере и цилиндре": "Из двух неравных линий, двух неравных поверхностей или двух неравных тел большая может оказаться меньше той величины, которую мы получим, если повторим меньшую надлежащее число раз." [6, с. 281] Соответствено данному пониманию идеи, Каган предлагает такую формулировку: *На ориентированной прямой меньший из двух заданных отрезков, будучи повторен достаточное число раз, превзойдёт больший.* В учебнике [3] на основании первых трёх групп аксиом Гильберта вводится понятие произведения отрезка (двухвершинника) на натуральное число. Поэтому было бы логичнее аксиому Архимеда сформулировать в виде: Для любых двух отрезков $[a]$ и $[p]$ найдётся натуральное число n такое, что $[a] < n[p]$. Правда, в данном учебнике предложение Архимеда выводится из более сильной аксиомы Дедекинда, поэтому предпочтительность данной формулировки может быть оправдана методическими соображениями.

Учитывая цель – доказательство теорем существования и единственности меры отрезка – представляется уместным такой подход введения аксиомы Архимеда при условии предварительного введения понятий одинаково ориентированных и противоположно ориентированных лучей и выяснения их свойств, как это сделано в [3].

Теорема 2. *Для всякого отрезка $[PQ]$ и всякого луча $[AB)$ существует на $[AB)$ бесконечная и притом единственная последовательность точек*

$$A = A_0, A_1, ..., A_n, ...$$

удовлетворяющая условиям:

Ad_1) $[A_{i-1}A_i) \uparrow\uparrow [AB), \;\; i = 1, 2, ...$

Ad_2) $[A_{i-1}A_i] = [PQ], \;\; i = 1, 2, ...$

Доказательство. По аксиоме III_1 существует точка A_1 на луче $[AB)$ такая, что $[A_0A_1] = [PQ]$. Тогда для точек A_0, A_1 требования Ad_1, Ad_2 будут выполнены. Предположим, что построены точки A_i, $0 < i < n-1$, для которых справедливо заключение теоремы при $n > 1$. Тогда на луче, дополнительном к лучу $[A_{n-1}A_{n-2})$, по аксиоме III_1 существует точка A_n такая, что $[A_{n-1}A_n] = [PQ]$. Поскольку луч $[A_{n-1}A_n)$ совпадает с лучом, дополнительным к $[A_{n-1}A_{n-2})$, то он одинаково ориентирован с лучом $[A_{n-2}A_{n-1})$. Но $[A_{n-2}A_{n-1}) \uparrow\uparrow [AB)$. Значит, $[A_{n-1}A_n) \uparrow\uparrow [AB)$. Поскольку по индукционному допущению точка A_{n-1} принадлежит лучу $[AB)$, то луч $[AA_{n-1})$ совпадает с лучом $[AB)$. Поэтому $[AA_{n-1}) \uparrow\uparrow [A_{n-1}A_n)$. По предл. 14 $A - A_{n-1} - A_n$. Значит, точка A не принадлежит лучу $[A_{n-1}A_n)$. Следовательно, одинаковая ориентированность лучей $[A_{n-1}A_n)$ и $[AB)$ означает, что все точки луча $[A_{n-1}A_n)$ содержатся в $[AB)$. Таким образом, точка A_n принадлежит лучу $[AB)$. По индукции требуемая последовательность определена для всех натуральных n.

Единственность проверяется “от противного.” Допустим, что существует ещё одна последовательность $A = B_0, B_1, ..., B_n, ...$, такая, что:

Ad_1') $B_{i-1}B_i \uparrow\uparrow [AB)$, $i = 1, 2, ...$

Ad_2') $[B_{i-1}B_i] = [PQ]$, $i = 1, 2, ...$

Пусть $n = \min\{i \in N |\ A_i \neq B_i\}$. Так как $A_0 = B_0$, то $n \geq 1$ и $A_i = B_i$ при $i < n$, а $A_n \neq B_n$. В частности, $A_{n-1} = B_{n-1}$. Ввиду условия Ad_1, Ad_1' справедливо: $[A_{n-1}A_n) \uparrow\uparrow [AB)$, $[B_{n-1}B_n) \uparrow\uparrow [AB)$. Тогда $[A_{n-1}A_n) \uparrow\uparrow [B_{n-1}B_n)$. Следовательно лучи, $[A_{n-1}A_n)$, $[B_{n-1}B_n)$, имеющие общую вершину и одинаково ориентированные, совпадают. Из условий Ad_2 и Ad_2' следует: $[A_{n-1}A_n] = [B_{n-1}B_n]$. По предл. 16 точки A_n и B_n совпадают. Полученное противоречие доказывает единственность последовательности, удовлетворяющей условиям Ad_1, Ad_2. □

Теорема 3. *Последовательность (1), удовлетворяющая условиям 1), 2) аксиомы IV_1, совпадает с последовательностью, определяемой условиями Ad_1 и Ad_2.*

Доказательство. Пусть выполнено условие Ad_1. Из того, что $[A_{i-1}A_i) \uparrow\uparrow [AB)$ и $[A_iA_{i+1}) \uparrow\uparrow [AB)$, следует по предл. 8, что $[A_{i-1}A_i) \uparrow\uparrow [A_iA_{i+1})$ при всех $i = 1, 2, ...$, что влечёт на основании предл. 14 соотношение $A_{i-1} - A_i - A_{i+1}$.

Пусть, наоборот, выполнено условие 1 аксиомы IV_1. Утверждение Ad_1 проверяется методом математической индукции. Для $i = 1$ оно верно, поскольку $A_0 = A$, точка A_1 принадлежит лучу $[AB)$, а, значит, луч $[A_0A_1)$ совпадает с $[AB)$. По предл. 8 имеем: $[A_0A_1) \uparrow\uparrow [AB)$. Пусть $[A_{i-1}A_i) \uparrow\uparrow [AB)$ при $0 < i < k$. Так как $A_{k-2} - A_{k-1} - A_k$, то по предл. 14 справедливо: $[A_{k-2}A_{k-1}) \uparrow\uparrow [A_{k-1}A_k)$. По индукционному предположению $[A_{k-2}A_{k-1}) \uparrow\uparrow [AB)$. По предл. 8 $[A_{k-1}A_k) \uparrow\uparrow [AB)$. В силу математической индукции утверждение верно для всех $i = 1, 2, ...$ □

Теорема 4. *В последовательности (1), удовлетворяющей условиям Ad_1 и Ad_2*

1) $k > m \quad \Leftrightarrow \quad A - A_m - A_k$.

2) $k > m > s, \quad \Rightarrow \quad A_s - A_m - A_k$.

Доказательство. 1). Докажем сначала индукцией по $k - m$, что при $k > m$ истинно: $A - A_m - A_k$. Пусть $k - m = 1$, т. е. $k = m + 1$. По условию Ad_1 имеем $[A_mA_{m+1}) \uparrow\uparrow [AB)$. Поскольку $A_m \in [AB)$, то лучи $[AA_m)$ и $[AB)$ совпадают и $[A_mA_{m+1}) \uparrow\uparrow [AA_m)$. По предл. 10 $[AA_m) \uparrow\downarrow [A_mA)$. По предл. 12(1) $[A_mA_{m+1}) \uparrow\downarrow [A_mA)$. Следовательно, лучи $[A_mA)$ и $[A_mA_{m+1})$ дополнительные и, значит, $A - A_m - A_{m+1}$.

Пусть утверждение верно для $k - m = s$. По доказанному выше $A - A_{m+s} - A_{m+s+1}$. По индукционному предположению $A - A_m - A_{m+s}$. По предл. 4 $A - A_m - A_{m+s+1}$. Для $k - m = s + 1$ утверждение 1) доказано.

Пусть, наоборот, $A - A_m - A_k$. По аксиоме II_1 $A_m \neq A_k$. Значит, $k \neq m$. Если $k < m$, то по доказанному выше $A - A_k - A_m$. Получаем противоречие с аксиомой II_3. Таким образом, $k > m$.

2). При $k > m > s$ из 1) следует : $A - A_m - A_k$ и $A - A_s - A_m$. По предл. 4 $A_s - A_m - A_k$. □

Аксиома $IV_{1'}$. (Архимеда) *Для всяких отрезков $[PQ]$ и $[AB]$ и последовательности точек $A = A_0, A_1, ..., A_n, ...$, удовлетворяющей условиям: Ad_1 и Ad_2 найдётся натуральное число n такое, что $A - B - A_n$.*

3). *Единственность натурального числа n, для которого выполнено условие (2) .*

Теорема 5. *Для всяких отрезков* $[PQ]$ *и* $[AB]$ *и последовательности точек* $A = A_0$, $A_1, ..., A_n, ...$, *удовлетворяющей условиям* Ad_1 *и* Ad_2, *существует и притом единственное число* $n \in \mathbb{N}_0$ *такое, что*

$$B = A_n, \quad \textit{либо} \quad A_n - B - A_{n+1}. \tag{3}$$

Доказательство. По аксиоме Архимеда $IV_{1'}$ множество $\{i \in N \mid A - B - A_{i+1}\}$ непусто. Оно ограничено снизу, и потому имеет минимум n. Тогда $A - B - A_{n+1}$ и неверно, что $A - B - A_n$. По предл. 6 это и означает выполнение соотношений (2). Тем самым доказано существование требуемого числа $n \in \mathbb{N}_0$.

Допустим, что существует ещё одно число $m \in N$, такое, что:

$$B = A_m, \quad \text{либо} \quad A_m - B - A_{m+1}, \tag{4}$$

и $n < m$. Тогда $n + 1 \leq m$.

Случай 1. $n + 1 = m$. $\Rightarrow n = m - 1$. Соотношения (3) дают:

$$B = A_{m-1}, \quad \text{либо} \quad A_{m-1} - B - A_m.$$

Невозможно, чтобы $B = A_{m-1}$, так как тогда $B \neq A_m$, и (4) даёт: $A_m - A_{m-1} - A_{m+1}$. Но по теор. 4(2) имеет место соотношение $A_{m-1} - A_m - A_{m+1}$. По аксиоме II_3 из трёх различных точек прямой только одна может лежать между двумя другими. Пришли к противоречию. Следовательно, $A_{m-1} - B - A_m$. По аксиоме II_1 $B \neq A_m$ и условие (4) даёт: $A_m - B - A_{m+1}$. По теор. 4(1) $A - A_n - A_{n+1}$. По предл. 6 всякая точка отрезка $[A_{m-1}A_{m+1}]$, отличная от A_m, должна принадлежать только одному из отрезков $[A_{m-1}A_m]$, $[A_mA_{m+1}]$, тогда как точка B принадлежит обоим. Пришли к противоречию.

Случай 2. $n+1 < m$. По теореме 4(2) $A_n - A_{n+1} - A_m$. Невозможно, чтобы $B = A_m$, так как тогда $A_n - A_{n+1} - B$ и по акс. II_1 $B \neq A_n$, и ввиду (3) $A_n - B - A_{n+1}$, что противоречит аксиоме II_3 : из трёх точек A_n, B, A_{n+1} две лежат между двумя другими. Тогда, ввиду (4), справедливо: $A_m - B - A_{m+1}$. Заметим, что $B \neq A_n$, иначе из последнего соотношения вытекало бы $A_m - A_n - A_{m+1}$, а по теор. 4(1) должно выполняться $A_n - A_m - A_{m+1}$, что приводит к противоречию с аксиомой II_3. Поэтому условие (3) даёт $A_n - B - A_{n+1}$. Итого, имеем 3 соотношения:

$$A_n - A_{n+1} - A_m, \qquad A_m - B - A_{m+1}, \qquad A_n - B - A_{n+1}.$$

Из первого и третьего на основании предл. 4 получаем: $A_n - B - A_m$. Из второго и полученного усматриваем противоречие с предл. 6: всякая точка отрезка $[A_nA_{m+1}]$, отличная от A_m должна принадлежать только одному из отрезков $[A_nA_m]$, $[A_mA_{m+1}]$, тогда как точка B принадлежит обоим. Итак, во всех случаях имеем противоречие, доказывающее единственность натурального числа n, для которого выполняется условие (3). □

При всей, казалось бы, абсурдности допущения двух натуральных чисел, при которых выполняется заключение теоремы 5, эта кажущаяся абсурдность обусловлена исключительно нашим привычным представлением о прямой. Однако, если представить прямую в виде петли (например, в форме декартова листа) с нанесённой на неё шкалой из целых чисел, то для точки пересечения будет иметь место ситуация с двумя натуральными числами при надлежащем определении порядка и конгруэнтности. Всё дело в аксиомах.

4) *Независимость результата измерения отрезка от конца, с которого начинается откладывание единичного отрезка — дискретный случай.*

Определение 1. *Будем говорить, что отрезок $[PQ]$ укладывается в отрезке $[AB]$ с конца A целое число n раз, если существует последовательность (1), удовлетворяющая условиям Ad_1 и Ad_2, такая, что $B = A_n$.*

Теорема 6. *Если*

$$A = A_0, A_1, ..., A_n, ... \text{ и } B = B_0, B_1, ..., B_n, ...$$

– две последовательности точек на одном или разных лучах $[AA')$ и $[BB')$, удовлетворяющие условиям Ad_2 для некоторого отрезка $[PQ]$, и

$$[A_{i-1}A_i) \uparrow\uparrow [AA'), \quad [B_{i-1}B_i) \uparrow\uparrow [BB') \quad \text{при} \quad i = 1, 2, ...,$$

то для любого натурального числа n справедливо:

$$[AA_n] = [BB_n].$$

Доказательство. – индукцией по n. Действительно, для $n = 1$ утверждение справедливо по аксиоме III_2. Предположим, что оно справедливо для $n-1$, где $n > 0$. Тогда $[AA_{n-1}] = [BB_{n-1}]$. По аксиоме III_2 $[A_{n-1}A_n] = [B_{n-1}B_n]$. По теор. 4(1) имеем $A - A_{n-1} - A_n$ и $B - B_{n-1} - B_n$. Тогда по аксиоме III_3 выполняется: $[AA_n] = [BB_n]$. □

Теорема 7. *Если отрезок $[PQ]$ укладывается в отрезке $[AB]$ с конца A целое число n раз и $[AB] = [A'B']$, то $[PQ]$ укладывается в отрезке $[A'B']$ с конца A' так же n раз.*

Доказательство. Пусть $A = A_0, A_1, ..., A_n, ...$ – последовательность точек, удовлетворяющая условиям Ad_1 и Ad_2. Тогда $B = A_n$. По теор. 2 на луче $[A'B')$ существует последовательность точек $A' = A'_0, A'_1, ..., A'_n, ...$, удовлетворяющая условиям: $A'_{i-1}A'_i \uparrow\uparrow [A'B')$, $i = 1, 2, ...$ и $[A'_{i-1}A'_i] = [PQ]$, $i = 1, 2, ...$ По теор. 6 $[AA_n] = [A'A'_n]$. Тогда $[AB] = [A'A'_n]$. По условию $[AB] = [A'B']$. Тогда $[A'B'] = [A'A'_n]$, и по предл. 16 имеем: $B' = A'_n$. Это означает, что отрезок $[PQ]$ укладывается в отрезке $[A'B']$ с конца A' также n раз. □

Учитывая аксиому III_0, выводим

Следствие 1. *Если отрезок $[PQ]$ укладывается в отрезке $[AB]$ с конца A целое число n раз, то и в $[BA]$ с конца B он укладывается n раз.*

Следствие 2. *Пусть для данных отрезков $[AB]$ и $[PQ]$, $[PQ] < [AB]$, последовательность точек (1) удовлетворяет условиям Ad_1 и Ad_2, а последовательность точек $B = B_0, B_1, ..., B_n, ...$ луча $[BA)$ удовлетворяет аналогичным условиям:*

$$[B_iB_{i+1}) \uparrow\uparrow [BA), \quad [B_iB_{i+1}] = [PQ], \ \ i = 0, 1, ...$$

Тогда, если натуральное число n таково, что

$$[AA_n] \leq [AB] < [AA_{n+1}],$$

то

$$[BB_n] \leq [BA] < [BB_{n+1}].$$

Доказательство. Утверждение вытекает из теор. 6 на основании аксиомы III_0 и предл. 20. □

Заметим, что для λ-конгруэнтных ордуг теорема 7 также справедлива, а вот следствия из неё не выполняются.

Отныне можно не указывать с какого конца отрезка $[AB]$ откладывается отрезок $[PQ]$ при условии, что он укладывается в $[AB]$ целое число раз. В случаях, когда отрезок может быть заменён любым конгруэнтным ему отрезком, как, например, отрезок $[PQ]$ в теоремах 2 - 5, удобно использовать краткое обозначение $[p]$ для всего класса конгруэнтных отрезков. В [3] определено *сложение отрезков*: $[a] \oplus [b] = [c]$, если на некоторой прямой найдутся точки A, B, C, такие, что $A-B-C$ и $[AB] = [a]$, $[BC] = [b]$, $[AC] = [c]$). Корректность определения суммы отрезков обеспечивается аксиомой III_3. *Умножение отрезка* $[p]$ на действительное число n определяется как сумма n отрезков, конгруэнтных $[p]$. Более точно: $1 * [p] = [p]$; и $n * [p] = (n-1) * [p] \oplus [p]$. Если $[a] = n * [p]$, то в этом случае также говорят, что отрезок $[a]$ *n-кратен отрезку* $[p]$ или, что отрезок $[p]$ является *n-ой частью отрезка* $[AB]$, и обозначают $[p] = \frac{1}{n}[a]$. Факт, что отрезок $[PQ]$ укладывается в отрезке $[AB]$ целое число n раз, может быть ввиду теоремы 6 обозначен так: $[AB] = n * [PQ]$. В силу следствия 1 справедливо:
$\frac{1}{n}[AB] = \frac{1}{n}[BA]$, а по аксиоме III_0, если $[PQ] = \frac{1}{n}[AB]$, то и $[QP] = \frac{1}{n}[AB]$. Звёздочку $*$ можно опускать, если это не вызовет недоразумений. Отрезок $m\left(\frac{1}{n}[a]\right)$, если он существует, будем называть *рациональной частью отрезка* $[a]$ (независимо от того $m < n$ или $m \geq n$.)

В новых терминах аксиома Архимеда может быть переформулирована так:

Аксиома $IV_{\tilde{1}}$ *Для любых отрезков* $[a]$ *и* $[p]$ *найдётся натуральное число* n *такое, что*

$$[a] < n[p].$$

Теорема 5'. *Для всяких отрезков* $[a]$ *и* $[p]$, $[p] \leq [a]$, *существует и притом единственное число* $n \in \mathbb{N}_0$ *такое, что*

$$n[p] \leq [a] < (n+1)[p].$$

Доказательство. Действительно, по теор. 5 существуют последовательность точек $A = A_0, A_1, ..., A_n, ...$, удовлетворяющая условиям Ad_1 и Ad_2 для отрезков $[a] = [AB]$ и $[p] = [PQ]$, и единственное число $n \in \mathbb{N}_0$ такое, что

$$B = A_n, \quad \text{либо} \quad A_n - B - A_{n+1}.$$

Заметим, что $n \neq 0$, иначе выполнялось бы $A_0 - B - A_1$, откуда следовало бы $[a] = [A_0B] < [A_0A_1] = [p]$ в противоречии с условием. По теор. 4(1) выполняется соотношение $A - A_n - A_{n+1}$. По предл. 5 при условии $A_n - B - A_{n+1}$ имеем:

$$(A_n - B - A_{n+1}) \wedge (A - A_n - A_{n+1}) \quad \Rightarrow \quad (A - A_n - B) \wedge (A - B - A_{n+1}).$$

Тогда $[AA_n] < [AB]$ и $[AB] < [AA_{n+1}]$. Принимая во внимание, что $[AA_n] = n[p]$, $[AA_{n+1}] = (n+1)[p]$, получаем требуемые неравенства. □

5) *Независимость результата измерения отрезка от "точки отсчёта" – дискретный случай.*

Теорема 8. *Пусть в результате последовательного откладывания m раз отрезка $[p]$ от точки B на некоторой прямой a получена точка A_m, а в результате последовательного откладывания n раз отрезка $[p]$ в противоположном направлении от точки B получена точка C_n. Тогда отрезок $[p]$ укладывается в $[A_mC_n]$ $m+n$ раз.*

Иначе это можно выразить так:

$$\text{если } A_m - B - C_n, \quad [BA_m] = m[p], \quad [BC_n] = n[p], \ \text{ то } [A_mC_n] = (m+n)[p].$$

Доказательство. Пусть a^- и a^+ – дополнительные лучи с вершиной B прямой a; $B = A_0, A_1, ..., A_m$ и $B = C_0, C_1, ..., C_n$ – последовательности точек прямой a, такие, что

$$[A_{i-1}A_i) \uparrow\uparrow a^- \quad \text{и} \quad [A_{i-1}A_i] = [p] \quad \text{при} \ \ i = 1, ..., m,$$

$$[C_{i-1}C_i) \uparrow\uparrow a^+ \quad \text{и} \quad [B_{i-1}B_i] = [p] \quad \text{при} \ \ i = 1, ..., n.$$

По теор. 2 последовательность точек $A_m = X_0, X_1, ..., X_i, ...$ однозначно определена условиями: $[X_{i-1}X_i) \uparrow\uparrow [A_mB)$ и $[X_{i-1}X_i] = [p]$ при $i = 1, 2, ...$ По следствию 1 $[A_mB] = m[p]$. Поэтому $B = X_m$. Применим индукцию по числу n укладываний отрезка p на луче a^+.

$n = 1$. Так как точки A_m и C_1 принадлежат дополнительным лучам, то $A_m - B - C_1$ или, что то же самое, $A_m - X_m - C_1$. По теор. 4(1) $A_m - X_m - X_{m+1}$. По предл. 13 $[X_mC_1) \uparrow\uparrow [A_mX_m) \uparrow\uparrow [X_mX_{m+1})$, а по предл. 8 $[X_mC_1) \uparrow\uparrow [X_mX_{m+1})$, следовательно лучи $[X_mC_1)$ и $[X_mX_{m+1})$ совпадают. По предл. 16 $C_1 = X_{m+1}$. А это означает, что $[A_mC_1] = (m+1)[p]$.

Пусть утверждение справедливо для $n-1$, где $n > 1$. Так как в отрезке $[BC_{n-1}]$ отрезок $[p]$ укладывается $n-1$ раз, то по индукционному предположению в $[A_mC_{n-1}]$ он укладывается $m+n-1$ раз. Поэтому $C_{n-1} = X_{m+n-1}$. По теор. 4(1) $B - C_{n-1} - C_n$ или, иначе $X_m - X_{m+n-1} - C_n$. По теор. 4(2) имеем: $X_m - X_{m+n-1} - X_{m+n}$. А по предл. 13 справедливо: $[X_{m+n-1}C_n) \uparrow\uparrow [X_mX_{m+n-1}) \uparrow\uparrow [X_{m+n-1}X_{m+n})$, и по предл. 8 $[X_{m+n-1}C_n) \uparrow\uparrow [X_{m+n-1}X_{m+n})$. Следовательно лучи $[X_{m+n-1}C_n)$ и $[X_{m+n-1}X_{m+n})$ совпадают. По предл. 16 точки C_n и X_{m+n} совпадают, а это означает равенство: $[A_mC_n] = (m+n)[p]$. Доказано. □

Данный факт по сути означает независимость измерения отрезка от "точки отсчёта," тогда как следствие 1 устанавливает независимость измерения от направления отсчёта: начинается ли отсчёт с одного конца отрезка в направлении другого или наоборот, – правда, пока что в дискретном случае.

В отсутствие аксиомы III_0 как, например, в случае λ-конгруэнтных ордуг орбиты, утверждение перестаёт быть верым, что становится вполне понятным, если вспомнить аналогию с временем доплытия теплохода вверх и вниз по течению реки.

4. Свойства рациональных частей отрезка

Теорема 9. *Пусть $[a]$, $[b]$ – отрезки; m, n – натуральные числа. Тогда:*

$$\begin{array}{lccc}
1). & n < m & \Leftrightarrow & n[a] < m[a]. \\
2). & [a] < [b] & \Rightarrow & n[a] < n[b]. \\
3). & [a] = [b] & \Rightarrow & n[a] = n[b]. \\
4). & m(n[a]) & = & (m \cdot n)[a]. \\
5). & (m+n)[a] & = & m[a] \oplus n[b].
\end{array}$$

Доказательство. 1). Пусть (1) – последовательность точек некоторого луча, удовлетворяющая условиям Ad_1 и Ad_2 для отрезка $[PQ] = [a]$. По теор. 4(1) и определению отношения $<$ для отрезков имеем:

$$n < m \ \Leftrightarrow \ A_0 - A_n - A_m \ \Leftrightarrow \ [A_0A_n] < [A_0A_m].$$

Но $[A_0A_n] = n[a]$, $[A_0A_m] = m[a]$. Значит, $n < m \Leftrightarrow n[a] < m[a]$.

2). Пусть $[a] < [b]$. Доказательство проведём индукцией по n. Для $n = 1$ утверждение, очевидно, справедливо. Допустим, что оно справедливо для $n-1$ при $n > 1$. Пусть (1) − последовательность точек некоторого луча, удовлетворяющая условиям Ad_1 и Ad_2 для отрезка $[PQ] = [b]$. Тогда $[A_0A_n] = n[b]$. По аксиоме III_1 на луче $[A_{n-1}A_n)$ существует точка B, такая, что $[A_{n-1}B] = [a]$, а на дополнительном луче $[A_{n-1}A_0)$ существует точка C, такая, что $[A_{n-1}C] = (n-1)[a]$. Тогда по предл. 7 $B - A_{n-1} - C$, а по акс. III_1 $B \neq C$. Так как $[a] < [b] = [A_{n-1}A_n]$, то $A_{n-1} - B - A_n$. По индукционному предположению $[A_{n-1}C] < [A_{n-1}A_0] = (n-1)[b]$. Поэтому $A_0 - C - A_{n-1}$. По теор. 4(1) верно: $A_0 - A_{n-1} - A_n$. По предл. 5 имеем:

$$(A_0 - A_{n-1} - A_n) \wedge (A_{n-1} - B - A_n) \quad \Rightarrow \quad (A_0 - B - A_n).$$

По предл. 4 верно:

$$(A_0 - A_{n-1} - A_n) \wedge (A_0 - C - A_{n-1}) \quad \Rightarrow \quad (A_0 - C - A_n).$$

Предл. 22 позволяет заключить: $[CB] < [A_0A_n]$. Но $[A_0A_n] = n[b]$, а по следствию 2 справедливо: $[CB] = n[a]$. Следовательно, $n[a] < n[b]$.

3). Если $[a] = [b]$, то в силу предл. 15, 16 отрезки $[a]$ и $[b]$ определяют на произвольном луче одну и ту же последовательность точек (1), удовлетворяющую условиям Ad_1 и Ad_2. Поэтому $n[a] = [A_0A_n] = n[b]$.

4). Пусть $A = A_0, A_1, ..., A_{n\cdot m}$ – последовательность точек луча $[AB)$, удовлетворяющая условиям Ad_1 и Ad_2 для отрезка $[a]$. Тогда $[AA_{n\cdot m}] = (n \cdot m)[a]$. Определим последовательность точек $B_i = A_{n\cdot i}$, $i = 0, 1, ..., m$. Для каждого номера i последовательность $A_{n\cdot i}, A_{n\cdot i+1}, ..., A_{n\cdot(i+1)}$ удовлетворяет условиям Ad_1 и Ad_2 для отрезка $[a]$. Поэтому $[A_{n\cdot i}A_{n\cdot(i+1)}] = [B_iB_{i+1}] = n[a]$. По теор. 4(1) $A - A_{n\cdot i} - A_{n\cdot(i+1)}$ и, значит, $A - B_i - B_{i+1}$, что по предл. 14 влечёт: $[AB_i) \uparrow\uparrow [B_iB_{i+1})$. Но луч $[AB_i)$ совпадает с лучом $[AB)$. Следовательно, $[B_iB_{i+1}) \uparrow\uparrow [AB)$. Таким образом, последовательность $A = B_0, B_1, ..., B_m$ удовлетворяет условиям Ad_1 и Ad_2 для отрезка $n[a]$. Значит, $[B_0B_m] = m(n[a])$. Но $[B_0B_m] = [AA_{n\cdot m}]$. Окончательно получаем: $m(n[a]) = (n \cdot m)[a] = (m \cdot n)[a]$. Доказано.

5) По теор. 8. □

Ещё раз напомним, что $\frac{1}{n}[a] = [b] \Leftrightarrow [a] = n[b]$. В частности, $\frac{1}{1}[a] = [a]$.

Теорема 10. *Пусть* $[a]$, $[b]$ *– отрезки;* m, n *– натуральные числа. Тогда:*

1). $\frac{1}{n}(n[a]) = [a]$.

2). $n\left(\frac{1}{n}[a]\right) = [a]$, *если отрезок* $\frac{1}{n}[a]$ *существует.*

3). $[a] < [b] \Rightarrow \frac{1}{n}[a] < \frac{1}{n}[b]$, *если отрезки* $\frac{1}{n}[a]$, $\frac{1}{n}[b]$ *существуют.*

4). $[a] = [b] \Rightarrow \frac{1}{n}[a] = \frac{1}{n}[b]$, *если отрезки* $\frac{1}{n}[a]$, $\frac{1}{n}[b]$ *существуют.*

5). $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{m}[a]\right) = \frac{1}{n\cdot m}[a]$, *если отрезок* $\frac{1}{n\cdot m}[a]$ *существует.*

Доказательство. 1). Пусть $[b] = n[a]$. Тогда по определению n-ой части отрезка

$$[a] = \frac{1}{n}[b] = \frac{1}{n}(n[a]).$$

2). Пусть $[b] = \frac{1}{n}[a]$. Тогда
$$[a] = n[b] = n\left(\frac{1}{n}[a]\right).$$

3). Пусть $[a] < [b]$. Для отрезков $\frac{1}{n}[a]$ и $\frac{1}{n}[b]$ согласно предл. 19 выполняется одно из трёх соотношений:
$$\frac{1}{n}[a] = \frac{1}{n}[b], \qquad \frac{1}{n}[a] > \frac{1}{n}[b], \qquad \frac{1}{n}[a] < \frac{1}{n}[b].$$

Применяя теор. 9(2,3) и теор. 10(2), получим:
$$\frac{1}{n}[a] = \frac{1}{n}[b] \;\Rightarrow\; n\left(\frac{1}{n}[a]\right) = n\left(\frac{1}{n}[b]\right) \;\Rightarrow\; [a] = [b]. \tag{5}$$
$$\frac{1}{n}[a] > \frac{1}{n}[b] \;\Rightarrow\; n\left(\frac{1}{n}[a]\right) > n\left(\frac{1}{n}[b]\right) \;\Rightarrow\; [a] > [b].$$
$$\frac{1}{n}[a] < \frac{1}{n}[b] \;\Rightarrow\; n\left(\frac{1}{n}[a]\right) < n\left(\frac{1}{n}[b]\right) \;\Rightarrow\; [a] < [b]. \tag{6}$$
А поскольку для отрезков $[a]$ и $[b]$ также справедливо только одно из соотношений: $[a] = [b]$, $[a] > [b]$, $[a] < [b]$, то первые два варианта отпадают. Остаётся только третье соотношение
$$\frac{1}{n}[a] < \frac{1}{n}[b].$$

4). Аналогично 3).

5). Пусть существует отрезок $[p] = \frac{1}{m\cdot n}[a]$. Тогда по теор. 9(4)
$$[a] = (m\cdot n)[p] = m(n[p]).$$

Отсюда следует, что существуют отрезки $n[p] = \frac{1}{m}[a] \;\Rightarrow\; [p] = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{m}[a]\right)$. Получаем требуемое равенство. □

Из теор. 9(2,3) и 10(3,4) на основании свойств 1), 2) теоремы 10, как это сделано при выводе формул (5), (6), получим

Следствие 3

1). $[a] < [b] \;\Leftrightarrow\; n[a] < n[b]$,

2). $[a] = [b] \;\Leftrightarrow\; n[a] = n[b]$.

3). $[a] < [b] \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{n}[a] < \frac{1}{n}[b]$, *если отрезки* $\frac{1}{n}[a]$, $\frac{1}{n}[b]$ *существуют.*

4). $[a] = [b] \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{n}[a] = \frac{1}{n}[b]$, *если отрезки* $\frac{1}{n}[a]$, $\frac{1}{n}[b]$ *существуют.*

Замечание 1. Ряд свойств может быть выведен из более общих соображений.

Пусть L – множество всех отрезков. В [3, следствие 1, с. 122, теор. 21.2] установлено, что операция $\oplus$ сложения отрезков коммутативна и ассоциативна. Значит, алгебра $\langle L, \oplus\rangle$ является коммутативной полугруппой, из чего следуют свойства 4), 5) теоремы 9 и свойство 6). $n([a]\oplus[b]) = n[a]\oplus n[b]$ [8, упр. 4.8.6, 4.8.7, с. 65].

Отношение $>$ на L обладает свойствами транзитивности (предл. 21), антирефлексивности (по определению), связности (предл. 19), значит, является строгим линейным порядком. Кроме того оно монотонно относительно операции $\oplus$, т. е.

$$\forall_{[a],[x],[y]} \quad [y] > [x] \ \Rightarrow \ ([a] \oplus [y] > [a] \oplus [x]) \wedge ([y] \oplus [a] > [x] \oplus [a]).$$

Действительно, отложим на некотором луче от его вершины O отрезок $[OA] = [a]$, на дополнительном луче отложим отрезки $[OX] = [x]$ и $[OY] = [y]$. По предл. 7 $A - O - X$ и $A - O - Y$. Поэтому $[a] \oplus [x] = [AX]$ и $[a] \oplus [y] = [AY]$. Если $[y] > [x]$, то $O - X - Y$. По предл. 3

$$(A - O - X) \wedge (O - X - Y) \ \Rightarrow \ (A - X - Y) \ \Rightarrow \ [AY] > [AX].$$

Следовательно, $[a] \oplus [y] > [a] \oplus [x]$. Коммутативность операции $\oplus$ влечёт второе неравенство: $[y] \oplus [a] > [x] \oplus [a]$. Монотонность отношения $>$ доказана. Значит, система $\langle L, \oplus, > \rangle$ является *упорядоченной коммутативной полугруппой* [8, с. 85]. В силу этого справедливо следствие 3(1) [8, теор. 5.2.2, с. 86].

Однако в нашем изложении все обоснования опираются на понятие укладываемости отрезка в другом отрезке целое число раз, минуя операцию суммирования. Поэтому стилевое единство предопределило такую подачу материала.

Следствие 4. *Для всякого отрезка $[PQ]$ и любого натурального числа n существует отрезок*

$$[a] = \frac{1}{2^n}[PQ].$$

Доказательство. – индукцией по n. Пусть $n = 1$. По предл. 18 существует середина O отрезка $[PQ]$. Ясно, что отрезок $[PO] = \frac{1}{2}[PQ]$.

Предположим, что утверждение справедливо для $n - 1$, где $n > 1$, т.е. существует отрезок $[P'Q'] = \frac{1}{2^{n-1}}[PQ]$, или, что то же самое, $2^{n-1}[P'Q'] = [PQ]$. Существует точка O' – середина отрезка $[P'Q']$. Тогда $2[P'O'] = [P'Q']$. По теор. 9(4) имеем:

$$[PQ] = (2^{n-1} \cdot 2)[P'O'] = 2^n[P'O'].$$

Полагая, $[a] = [P'O']$, получим $[a] = \frac{1}{2^n}[PQ]$. □

Замечание 2. Согласно следствию 4 для любого отрезка $[a]$ существуют *двоично- рациональные части* его, т. е. отрезки вида $m\left(\frac{1}{2^k}[a]\right)$ при $m, k \in \mathbb{N}_0$, $m, k \neq 0$. Из $I - IV$ групп аксиом Гильберта (включая аксиому Кантора) выводится [5, теор. 6.8, с. 213], существование отрезков вида $m\left(\frac{1}{k}[a]\right)$, где $m, k \in \mathbb{N}_0$, $m, k \neq 0$.

Следствие 5. *Для любых отрезков $[a]$ и $[b]$ найдётся число $k \in \mathbb{N}_0$ такое, что*

$$\frac{1}{2^k}[b] < [a].$$

Доказательство. По аксиоме Архимеда для любых отрезков $[a]$ и $[b]$ существует натуральное число n такое, что $[b] < n[a]$. Для всякого n найдётся число $k \in \mathbb{N}_0$ такое, что $n < 2^k$. Тогда по теор. 9(1) справедливо: $n[a] < 2^k[a]$ и в силу транзитивности отношения $<$ для отрезков выполняется неравенство: $[b] < 2^k[a]$. Применяя теор. 10 (1, 3) и учитывая следствие 4, можем записать:

$$\frac{1}{2^k}[b] < \frac{1}{2^k}\left(2^k[a]\right) = [a],$$

что и требовалось доказать. (Другое доказательство смотреть в [3, лемма 34.1]) □

5. Обоснование единственности меры длины отрезка

Пусть L множество отрезков всех прямых пространства, определяемого аксиомами $I-III$ групп и IV_1 аксиоматики Гильберта.

Определение 2. *Говорят, что задана мера длины отрезка, если определено отображение* $l : L \to R$, *удовлетворяющее аксиомам:*
M_1) $l[AB] > 0$ *для всех* $[AB] \in L$,
M_2) *если* $[A_1B_1] = [AB]$, *то* $l[A_1B_1] = l[AB]$,
M_3) *если* $A - B - C$, *то* $l[AB] + l[BC] = l[AC]$.

Заметим, что существует бесконечное множество функций, удовлетворяющих *аксиомам меры* $M_1) - M_3$), именно: если l – мера на множестве отрезков L, то для любого действительного числа λ функция $\lambda \cdot l$ также является мерой на L. Справедливо и обратное утверждение:

Теорема 11. *Для любых двух мер* l *и* θ *найдётся положительное действительное число* λ, *такое, что* $\theta = \lambda \cdot l$.

Доказательство теоремы опирается на две леммы и следствия из них.

Лемма 1. *Для любой меры* $l : L \to R$ *если* $[AB] < [CD]$, *то* $l[AB] < l[CD]$.

Доказательство. Доказательство одинаково во всех учебниках [2–5]. Так как оно не занимает много места, то приведём его. По определению отношения $[AB] < [CD]$ найдётся точка H такая, что $C - H - D$ и $[AB] = [CH]$. По аксиомам M_3), M_2), M_1) справедливо: $l[CD] = l[CH] + l[HD] = l[AB] + l[HD] > l[AB]$. □

Следствие 6. *Равенство* $l[AB] = l[CD]$ *для какой-либо меры* l *влечёт:* $[AB] = [CD]$.

Доказательство. По предл. 19 для произвольных отрезков $[AB]$, $[CD]$ всегда выполняется одно из трёх соотношений: $[AB] = [CD]$, $[AB] < [CD]$, $[AB] > [CD]$. В силу леммы 1 равенство $l[AB] = l[CD]$ возможно только при $[AB] = [CD]$. □

Лемма 2. *Для любой меры* l *и любого отрезка* $[p]$ *справедливо:*

$$l(n[p]) = n \cdot l[p].$$

Доказательство. – индукцией по n. Для $n = 1$ утверждение следует из очевидного: $1[p] = [p]$. Пусть утверждение справедливо для всех $k \leq n - 1$, где $n > 1$. И пусть $[AB] = n[p]$. Тогда для последовательности (1), определённой условиями Ad_1, Ad_2 по отрезку $[PQ] = [p]$, выполняется $B = A_n$. По теор. 4(1) истинно: $A - A_{n-1} - A_n$. По аксиоме M_3) выполняется: $l[AA_n] = l[AA_{n-1}] + l[A_{n-1}A_n]$. Так как $[A_{n-1}A_n] = [p]$, то по аксиоме M_2) имеем: $l[A_{n-1}A_n] = l[p]$. Так как $[AA_{n-1}] = (n-1)[p]$, то по индукционному предположению $l[AA_{n-1}] = (n-1) \cdot l[p]$. Тогда

$$l(n[p]) = l[AA_n] = (n-1) \cdot l[p] + l[p] = n \cdot l[p].$$

□

Полагая в лемме 2 $[a] = n[p]$ и выражая $[p] = \frac{1}{n}[a]$, придём к формуле:

$$l\left(\frac{1}{n}[a]\right) = \frac{1}{n} \cdot l[a]. \tag{7}$$

Доказательство. теоремы 11. Пусть l, θ – две меры, определённые на L. Пусть $[a]$ и $[p]$ – произвольные отрезки. По следствию 5 отрезок $[e] = \frac{1}{n}[p]$ при достаточно больших натуральных числах $n = 2^k$ удовлетворяет неравенству $[e] < [a]$. По теор. 5' для отрезков $[a]$ и $[e]$ найдётся натуральное число m, зависящее от n, такое, что

$$m[e] \leq [a] < (m+1)[e], \qquad \text{или} \qquad m\left(\frac{1}{n}[p]\right) \leq [a] < (m+1)\left(\frac{1}{n}[p]\right).$$

По лемме 1 и аксиоме меры M_2) имеем:

$$l\left(m\left(\frac{1}{n}[p]\right)\right) \leq l[a] < l\left((m+1)\left(\frac{1}{n}[p]\right)\right),$$

$$\theta\left(m\left(\frac{1}{n}[p]\right)\right) \leq \theta[a] < \theta\left((m+1)\left(\frac{1}{n}[p]\right)\right).$$

По лемме 2 и формуле (7) имеем:

$$\frac{m}{n}\, l[p] \leq l[a] < \frac{m+1}{n}\, l[p], \qquad \frac{m}{n}\, \theta[p] \leq \theta[a] < \frac{m+1}{n}\, \theta[p].$$

В силу аксиомы меры M_1) справедливо $l[p] > 0$ и $\theta[p] > 0$. Поэтому неравенства можно переписать в виде:

$$\frac{m}{n} \leq \frac{l[a]}{l[p]} < \frac{m+1}{n}, \qquad \frac{m}{n} \leq \frac{\theta[a]}{\theta[p]} < \frac{m+1}{n}.$$

Вычитая из одного двойного неравенства второе, получим:

$$\left|\frac{l[a]}{l[p]} - \frac{\theta[a]}{\theta[p]}\right| < \frac{1}{n}.$$

По следствию 4 отрезок $[e] = \frac{1}{n}[p]$ существует для любого натурального числа $n = 2^k$, $k = 1, 2, ...,$ которое может быть как угодно большим. Следовательно,

$$\frac{l[a]}{l[p]} = \frac{\theta[a]}{\theta[p]} \qquad \text{или} \qquad \frac{\theta[a]}{l[a]} = \frac{\theta[p]}{l[p]}.$$

Поскольку равенство выполняется для любых двух отрезков $[a]$ и $[p]$, то, полагая $\lambda = \frac{\theta[p]}{l[p]}$, придём к равенству $\theta[a] = \lambda \cdot l[a]$, верному для всех отрезков $[a]$. Доказано. □

Из теор. 11 следует, что если 2 меры совпадают на каком либо одном отрезке $[p]$, то они сопадают и на всех отрезках. Таким образом, полагая, $\theta[p] = l[p] = 1$, приходим к теореме единственности меры:

Теорема 12. *Для любого отрезка $[PQ]$ существует не более одного отображения $l : L \to R$, удовлетворяющего аксиомам $M_1) - M_3)$, для которого $l[PQ] = 1$.*

Замечание 3.

1). Леммы 1, 2 и теор. 11 доказаны в предположении, что хотя бы одна мера отрезка существует.

2). Если существует какая-либо мера l (в смысле опр. 2), принимающая на каком-либо отрезке $[p]$ значение λ, то для меры $\theta = \frac{1}{\lambda}l$ отрезок $[p]$ будет единичным.

3). Аксиомами групп $I - III$ и аксиомой Архимеда IV_1 обосновывается существование меры, для которой произвольно заданный отрезок является единичным. В [2–4] по заданному отрезку $[p]$ конструктивно определяется мера $l_{[p]}$ как функция, сопоставляющая каждому отрезку $[a]$ результат его измерения отрезком $[p]$ путём последовательного откладывания его с последующим делением пополам. В $[5, 9]$ мера определяется через отношение отрезков $\frac{[a]}{[p]}$. По теор. 12 $l_{[p]}[a] = \frac{[a]}{[p]}$.

4). Используя весь комплекс аксиом $I - IV$ групп, включая аксиому Кантора, можно доказать (аналогично теор. 1.7, с.225 из [5]), что для всякой функции, удовлетворяющей условиям $M_1) - M_3)$, выполняется и требование $M_4)$: *существует отрезок единичной длины.* Поэтому утверждение теор. 11 остаётся верным и для мер, удовлетворяющих всем четырём условиям $M_1) - M_4)$.

6. Заключение

В данной статье мы постарались дать, по-возможности, строгое доказательство теоремы единственности, не обходя стороной те "мелочи," на которые в известных нам учебниках не обращается внимания, как на "очевидности."

Теорема единственности получена как следствие более глубокого факта пропорциональности всяких двух мер длины отрезка. Сам этот факт, по-видимому, не новый: он вытекает из утверждения [5, теор. 1.3, с. 225]: "*При переходе от одной единицы измерения к другой длины всех отрезков умножаются на одно и то же число, равное единице измерения, измеряемой при помощи новой единицы.*" Действительно, ввиду замечания 3(3) теор. 1.3 [5, с. 225] может быть записана в виде: $l_{[p]}[a] = l_{[q]}[a] \cdot l_{[p]}[q]$, что влечёт:

$$\frac{l_{[p]}[a]}{l_{[q]}[a]} = l_{[p]}[q] = \frac{[q]}{[p]} = const.$$

Теорема приведена без доказательства, поэтому нам трудно судить об аппарате, задействованном при его реализации. В приведённой формулировке теорема имеет более суженное значение, чем теор. 11 по той причине, что в ней определение длины отрезка увязывается с единицей измерения, т. е. не допускается определения длины отрезка, не связанного с процессом измерения. Например, на орбите однопараметрической группы преобразований можно определить меру длины отрезка как внутренним способом — через модуль разности параметров концов отрезка, так и внешним — посредством измерения эталоном. Так вот, первый способ теоремой 1.6 учебника [5, с. 225] не охватывается. Однако, согласно замечанию 3(4) на основании теор. 12 можно сделать вывод, что всякая мера совпадает с одной из мер $l_{[p]}$, $[p] \in L$.

Обоснование теоремы использует понятия укладываемости одного отрезка в другом (кратности отрезка), его частей и их свойства. Замена условия 1) аксиомы Архимеда условием Ad_1 в данной статье хотя и не представляется необходимой, но оказывается полезной при формализации понятия измеряющей функции и обосновании теоремы существования, которое надеемся в дальнейшем привести полностью. Пример с λ-конгруэнтностью, удовлетворяющей аксиомам $III_1 - III_3$ аксиоматики Гильберта и приводящей к различной кратности укладывания эталона с разных концов измеряемого отрезка, выявил "узкие места" и неувязки в доказательствах [2–5], которые мы и попытались преодолеть. Доказательство единственности меры длины отрезка в учебниках [2–4] по сути обосновывает единственность односторонней меры, поскольку процесс измерения зависит от конца измеряемого отрезка, с которого начинается процесс откладывания эталона. Поэтому в учебниках [3,4] доказательство единственности меры должно завершиться после того, как осуществлена проверка выполнения аксиомы 1 меры (конгруэнтные отрезки имеют равные меры длины) для функции, определённой в процессе обоснования единственности меры. А завершиться оно должно замечанием о том, что в силу конгруэнтности отрезков $[AB]$ и $[BA]$ и выполнения 1-ой аксиомы меры обе односторонние меры отрезка совпадают. Доказательство теоремы 1 единственности меры в учебнике [2, с. 376] использует единственность меры в классе отрезков, кратных эталону. Единственность же меры в классе отрезков, кратных эталону, не вытекает из приведённой вспомогательной леммы 1, утверждающей, что длина отрезка, в котором эталон (единичный отрезок) укладывается n раз, равна n, потому как однозначность результата последовательного откладывания эталона в отрезке как с разных концов, так и с одного конца, требует хотя и не сложного, но специального обоснования. На это следовало бы обратить внимание читателя, тем более, что данный факт неявно эксплуатируется в [2] при обосновании теоремы существования меры. Именно, когда эталон откладывается от внутренней точки B отрезка $[AC]$ в направлении точки A k раз и получается точка A_k, а затем в направлении точки C s раз и получается точка C_s. После чего считается, что эталон, отложенный от точки A_k в направлении точки C_s, укладывается в отрезке A_kC_s ровно $k+s$ раз. Это верно, если эталон не претерпевает изменений при откладывании его в разных направлениях (вспомнить аналогию с временем доплытия вверх и вниз по течению реки). В нашем изложении данный факт обосновывается теоремой 8.

Мы вовсе не ратуем за то, чтобы в учебной литературе содержались все выкладки. Но обратить внимание читателя на “развилки,” грозящие привести к неоднозначности меры, и их благополучное преодоление благодаря аксиоме III_0, на наш взгляд, необходимо.

Список литературы

1. Гильберт Д. Основания геометрии. — М. : ГОСТЕХИЗДАТ, 1948.
2. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия: в 2 ч. — Ч.2. — М. : КНОРУС, 2015.
3. Бахвалов С.В., Иваницкая В.П. Основания геометрии: аксиоматическое изложение геометрии Евклида. — Ч.1. — М. : Высшая школа, 1972.
4. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. — М. : Наука, 1971.
5. Трайнин Я.Л. Основания геометрии. — М. : Учпедгиз, 1961.
6. Каган В.Ф. Основания геометрии: в 2 ч. — Ч.2. — М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956.
7. Polikanova I.V. Measuring the arcs of the orbit of a one-parameter transformation group // Сибирские электронные математические известия. — 2020. — Т. 17. — С. 1823–1848. — DOI 10.33048/ semi. 2020. 17. 124.
8. Нечаев В.И. Числовые системы. — М. : Просвещение, 1975.
9. Атанасян Л.С., Гуревич Г.Б. Геометрия: в 2 ч. — Ч.2. — М. : Просвещение, 1976.