УДК 517.972.5

Аппроксимация решения односторонней задачи для p(x)-эллиптического уравнения[1]

Саженкова Т.В., Саженкова Е.В., Саженков С.А.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
Новосибирский государственный университет экономики и управления, г. Новосибирск
Новосибирский национальный исследовательский государственный университет
КРИ Хэйлунцзянского университета, г. Харбин (Китай)
t.sazhenkova@gmail.com, elsazh1977@gmail.com, sazhenkovs@yandex.ru

Аннотация

Рассматривается однородная задача Дирихле для p(x)-эллиптического уравнения анизотропной диффузии-абсорбции с ограничением значений диффузионного потока. Изучается семейство приближённых решений, получаемых с помощью метода штрафа с применением интегрального оператора штрафа А. Каплана. Устанавливается, что семейство приближённых решений при стремлении малого параметра регуляризации к нулю слабо сходится к решению исходной задачи в пространстве Соболева первого порядка с переменным показателем и что имеет место свойство равномерной аппроксимации в классах функций, непрерывных по Гёльдеру.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, p(x)-лапласиан, одностороннее ограничение, метод штрафа, пространство Муселяка–Орлича.

1. Введение

В статье рассматривается задача описания стационарного процесса нелинейной диффузии-абсорбции в ограниченном континууме Ω d-мерного пространства независимых переменных $\boldsymbol{x}$ ($d \in \mathbb{N}$ задано произвольно). Вектор-функция диффузионного потока $\boldsymbol{J}$ нелинейно зависит от градиента искомой скалярной функции $u = u(\boldsymbol{x})$. Эта зависимость — степенная, причём степень зависит от координаты, а именно, дивергенция диффузионного потока имеет вид $p(\boldsymbol{x})$-лапласиана:

$$\Delta_{p(\boldsymbol{x})} u = \mathrm{div}_x\big(|\nabla_x u|^{p(\boldsymbol{x})-2}\nabla_x u\big).$$

Функция абсорбции также нелинейна и имеет вид $\alpha(\boldsymbol{x}, u) = |u|^{\sigma(\boldsymbol{x})-2}u$. Заметим, что уравнения вида

$$-\Delta_{p(\boldsymbol{x})} u + \alpha(\boldsymbol{x}, u) = f \tag{1}$$

с нелинейным младшим членом $\alpha(\boldsymbol{x}, u)$ возникают в разнообразных приложениях самым естественным образом. Например, уравнения вида (1) и их нестационарные аналоги имеют место в описании электро- и термо-реологических жидкостей [1–4] и используются в технологиях обработки изображений [5–7]. Современная теория уравнений с $p(\boldsymbol{x})$-лапласианом и связанная с ней теория пространств Соболева с переменным показателем в целом построены и изложены в монографиях [4,8,9]. В настоящей работе изучается задача с ограничением на абсолютную величину диффузионного потока, $|\nabla_x u|^{p(\boldsymbol{x})-1} \le m$ ($m = \mathrm{const} > 0$), что

[1]Работа третьего соавтора (С.А. Саженкова) выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-01-00649). Название проекта: «Прямые методы вариационного исчисления и задачи гидродинамики».

приводит к тому, что математическая формулировка записывается в виде вариационного неравенства или, эквивалентно, в виде задачи минимизации функционала

$$F(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{p(\boldsymbol{x})} |\nabla_x \varphi|^{p(\boldsymbol{x})} + \frac{1}{\sigma(\boldsymbol{x})} |\varphi|^{\sigma(\boldsymbol{x})} \right) d\boldsymbol{x} - \int_\Omega f u \, d\boldsymbol{x}$$

на выпуклом замкнутом множестве $\{u\colon\ |\nabla_x u| \le m^{1/(p(\boldsymbol{x})-1)}\}$. Здесь f — заданная плотность распределённых внешних источников.

Одним из распространённых подходов к исследованию таких задач является метод штрафа, который позволяет эффективно изучать отмеченные выше вопросы о существовании и качественных свойствах решений и к тому же является конструктивным в том смысле, что позволяет аппроксимировать решения исходной односторонней задачи с помощью семейств решений приближённых задач безусловной минимизации. Метод штрафа является методом этой статьи. С помощью интегральной версии функции штрафа, предложенной А. Капланом [10], удаётся получить новые результаты об аппроксимации решения задачи нелинейной диффузии-абсорбции с ограничением на градиент в терминах равномерной сходимости (в $C_{loc}(\overline{\Omega})$).

Настоящая статья занимает место среди других исследований проблем описания процессов диффузии-реакции-абсорбции в системах с односторонними ограничениями на диффузионный поток (см., например, [11–13]) и является развитием работ [14–19].

2. Постановка и разрешимость задачи

В настоящей работе рассматривается следующая однородная задача Дирихле для уравнения анизотропной диффузии-абсорбции с $p(\boldsymbol{x})$-лапласианом в качестве диффузионного слагаемого и с односторонним ограничением на диффузионный поток.

Задача А. *В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с гладкой границей $\partial\Omega$ требуется найти функцию $u = u(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющую уравнению*

$$-\operatorname{div}_x \boldsymbol{J} + |u|^{\sigma(\boldsymbol{x})-2} u = f, \tag{2a}$$

в котором

$$\begin{gathered} \boldsymbol{J} \in \partial\Phi(\nabla_x u), \quad \Phi(\boldsymbol{\tau}) = \int_\Omega \frac{1}{p(\boldsymbol{x})} Q(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}, \\ Q(\boldsymbol{\tau}; \boldsymbol{x}) = \begin{cases} |\boldsymbol{\tau}|^{p(\boldsymbol{x})} & \textit{при} \quad |\boldsymbol{\tau}|^{p(\boldsymbol{x})-1} \le m, \\ +\infty & \textit{при} \quad |\boldsymbol{\tau}|^{p(\boldsymbol{x})-1} > m, \end{cases} \qquad m = \mathrm{const} > 0, \end{gathered} \tag{2b}$$

и граничному условию

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2c}$$

В постановке задачи А показатели $p(\boldsymbol{x})$ и $\sigma(\boldsymbol{x})$ заданы. Они удовлетворяют следующим условиям.

Условия на $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{\sigma}$.
(i) Показатели $p(\boldsymbol{x})$ и $\sigma(\boldsymbol{x})$ ограничены:

$$p^- \le p(\boldsymbol{x}) \le p^+, \quad \sigma^- \le \sigma(\boldsymbol{x}) \le \sigma^+, \quad \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega},$$

где p^-, p^+, σ^- и σ^+ — конечные постоянные такие, что $p^\pm > 2$, $\sigma^\pm > 1$, $p^- \le p^+$, $\sigma^- \le \sigma^+$.
(ii) В тех точках $\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}$, где $p(\boldsymbol{x}) < d$, выполняется дополнительное условие ограниченности $\sigma(\boldsymbol{x}) < \dfrac{d\, p(\boldsymbol{x})}{d - p(\boldsymbol{x})}$.

(iii) Отображения $\boldsymbol{x} \mapsto p(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{x} \mapsto \sigma(\boldsymbol{x})$ являются log-непрерывными, то есть для них выполняются неравенства

$$|p(\boldsymbol{x}_2)-p(\boldsymbol{x}_1)| \le \omega_1\big(|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1|\big), \quad |\sigma(\boldsymbol{x}_2)-\sigma(\boldsymbol{x}_1)| \le \omega_2\big(|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1|\big) \ \text{(для малых } |\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1|), \tag{3a}$$

в которых ω_1 и ω_2 — это модули непрерывности, удовлетворяющие условию

$$\limsup_{s\to 0+} \omega_k(s)\ln\frac{1}{s} = C_k < +\infty, \quad C_k = \mathrm{const}, \quad k = 1,2. \tag{3b}$$

Линейное пространство log-непрерывных функций обозначим через $C_{\log}(\Omega)$.

Для дальнейшего пояснения, а затем и изучения постановки задачи A, введём пространства Лебега и Соболева с переменными показателями. Конструкции этих пространств и их основные свойства изложим, следуя [8, chapter 1].

На множестве всех функций $\phi\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$ определяем функционал

$$\mathfrak{A}_{p(\cdot)}(\phi) = \int_\Omega |\phi(\boldsymbol{x})|^{p(\boldsymbol{x})} d\boldsymbol{x} < +\infty.$$

Вводим в рассмотрение множество

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) := \big\{\phi\colon \Omega \mapsto \mathbb{R} \text{ — измеримая функция, т.ч. } \mathfrak{A}_{p(\cdot)}(\phi) < +\infty\big\}.$$

При сделанных выше предположениях относительно показателя $p(\boldsymbol{x})$ и гладкости области Ω, будучи снабжённым стандартной структурой векторного пространства и нормой Люксембурга

$$\|\phi\|_{p(\cdot),\Omega} \equiv \|\phi\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf\big\{\lambda > 0\colon\ \mathfrak{A}_{p(\cdot)}(\phi/\lambda) \le 1\big\},$$

множество $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ становится рефлексивным сепарабельным банаховым пространством.[2] При этом справедливы следующие соотношения между значением функционала $\mathfrak{A}_{p(\cdot)}$ и нормой Люксембурга:

$$\begin{aligned} &\min\big\{\|\phi\|^{p^-}_{p(\cdot),\Omega}, \|\phi\|^{p^+}_{p(\cdot),\Omega}\big\} \le \mathfrak{A}_{p(\cdot)}(\phi) \le \max\big\{\|\phi\|^{p^-}_{p(\cdot),\Omega}, \|\phi\|^{p^+}_{p(\cdot),\Omega}\big\} \quad \forall\, \phi \in L^{p(\cdot)}(\Omega),\\ &\min\big\{\mathfrak{A}^{1/p^-}_{p(\cdot)}(\phi), \mathfrak{A}^{1/p^+}_{p(\cdot)}(\phi)\big\} \le \|\phi\|_{p(\cdot),\Omega} \le \max\big\{\mathfrak{A}^{1/p^-}_{p(\cdot)}(\phi), \mathfrak{A}^{1/p^+}_{p(\cdot)}(\phi)\big\} \quad \forall\, \phi \in L^{p(\cdot)}(\Omega). \end{aligned} \tag{4}$$

(Если $p^+ = p^- = p = \mathrm{const}$, то $\mathfrak{A}_p(\phi) = \|\phi\|^p_{p,\Omega}$.)

Аналогично определяется пространство $L^{\kappa(\cdot)}(\Omega)$ при показателях κ, отличающихся от p, в частности при $\kappa = \sigma$. Это пространство (как и пространство $L^{p(\cdot)}(\Omega)$) называется пространством Лебега с показателем $\kappa(\boldsymbol{x})$ (соответственно, с показателем $p(\boldsymbol{x})$).

Далее, банахово пространство $W^{1,p(\cdot)}_0(\Omega)$, называемое пространством Соболева первого порядка с показателем $p(\boldsymbol{x})$, определяется следующим образом:

$$\begin{cases} W^{1,p(\cdot)}_0(\Omega) = \big\{\phi \in L^{p(\cdot)}(\Omega)\colon\ |\nabla_x\phi|^{p(\boldsymbol{x})} \in L^1(\Omega),\ \phi = 0 \text{ на } \partial\Omega\big\},\\ \|\phi\|_{W^{1,p(\cdot)}_0(\Omega)} = \|\phi\|_{p(\cdot),\Omega} + \|\nabla_x\phi\|_{p(\cdot),\Omega}. \end{cases} \tag{5}$$

В (5) равенство нулю функции ϕ на границе $\partial\Omega$ понимается в смысле следа. С другой стороны, в силу того, что $p = p(\boldsymbol{x})$ — это log-непрерывная функция, множество $C^\infty_0(\Omega)$ плотно в $W^{1,p(\cdot)}_0(\Omega)$, пространство $W^{1,p(\cdot)}_0(\Omega)$ можно определить как замыкание $C^\infty_0(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_{W^{1,p(\cdot)}_0(\Omega)}$, не прибегая таким образом к понятию следа.

[2] Заметим, что пространство $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, снабжённое нормой Люксембурга, является специальным случаем хорошо изученных пространств Муселяка–Орлича $L^M(\Omega)$, где $M(\boldsymbol{x},u) = |u|^{p(\boldsymbol{x})}$.

Сопряжённое к $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ пространство изометрично $L^{p'(\cdot)}(\Omega)$, где p' — сопряжённый показатель: $p'(\boldsymbol{x}) = \dfrac{p(\boldsymbol{x})}{p(\boldsymbol{x})-1}$.

Сопряжённое к $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ пространство линейных непрерывных функционалов обозначим через $W^{-1,p'(\cdot)}(\Omega)$. Имеем,

$$\phi \in W^{-1,p'(\cdot)}(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists\,(w_1,\ldots,w_d),\ w_i \in L^{p'(\cdot)}(\Omega),\ \text{т.ч.} \\ \langle \phi,\psi\rangle = \displaystyle\int_\Omega \sum_{i=1}^d w_i\,\partial_{x_i}\psi\,d\boldsymbol{x} \quad \forall\,\psi \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega). \end{cases}$$

Здесь, как обычно, через $\langle\phi,\psi\rangle$ обозначается скобка двойственности — значение функционала $\phi \in W^{-1,p'(\cdot)}(\Omega)$ на элементе $\psi \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$.

Вернёмся к пояснению постановки задачи А.

В уравнении (2a) правая часть $f \in W^{-1,p'(\cdot)}(\Omega)$ — это заданный функционал.

Соотношения (2b) означают, что диффузионный поток $\boldsymbol{J}$ является элементом субдифференциала $\partial\Phi$ функционала Φ: $\boldsymbol{\tau} \mapsto \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(\boldsymbol{x})} Q(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x});\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$ в точке $\boldsymbol{\tau} = \nabla_x u$. Заметим, что Φ является дифференцируемым по Гато отображением на множестве

$$M := \left\{\boldsymbol{\tau}\colon\ \Omega \mapsto \mathbb{R}^d \text{ — измеримая вектор-функция, т.ч. } |\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x})| \le m^{1/(p(\boldsymbol{x})-1)}\right\} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)^d$$

и его производная по Гато $\Phi'(\boldsymbol{\tau})$ определяется формулой

$$\langle\Phi'(\boldsymbol{\tau}),\boldsymbol{v}\rangle = \int_\Omega |\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x})|^{p(\boldsymbol{x})-2}\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \quad \forall\,\boldsymbol{v} \in L^{p(\cdot)}(\Omega)^d. \tag{6}$$

В силу известного свойства эквивалентности в субдифференциальном исчислении [20, глава I, §5] заключаем, что $\partial\Phi(\boldsymbol{\tau})$ определён на M и $\partial\Phi(\boldsymbol{\tau}) = \{\Phi'(\boldsymbol{\tau})\}$. Также заметим, что Φ не является собственной функцией на $L^{p(\cdot)}(\Omega)^d \setminus M$ и, значит, $\partial\Phi(\boldsymbol{\tau}) = \emptyset$ при $\boldsymbol{\tau} \in L^{p(\cdot)}(\Omega)^d \setminus M$. Эти наблюдения приводят нас к следующей формулировке.

Определение 1. Слабым решением *задачи А называется функция $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, удовлетворяющая оценке*

$$|\nabla_x u| \le m^{1/(p(\boldsymbol{x})-1)} \ \textit{п.в. в } \Omega \tag{7a}$$

и вариационному неравенству

$$\int_\Omega \left[|\nabla_x u|^{p(\boldsymbol{x})-2}\nabla_x u\cdot\nabla_x(\varphi-u) + |u|^{\sigma(\boldsymbol{x})-2}u(\varphi-u)\right]d\boldsymbol{x} \ge \langle f,\varphi-u\rangle \tag{7b}$$

для любой пробной функции $\varphi \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ такой, что $|\nabla_x\varphi| \le m^{1/(p(\boldsymbol{x})-1)}$ п.в. в Ω.

Замечание 1. *В силу условий на p и σ (пункт (ii)) и теоремы вложения Соболева для пространств с переменными показателями [8, chapter 1, lemma 1.14] имеем, что $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{\sigma(\cdot)}(\Omega)$. Отсюда и из неравенства Гёльдера [8, chapter 1, lemma 1.4] следует, что интеграл выражения $|u|^{\sigma(\boldsymbol{x})-2}u(\varphi-u)$ в (7b) для слабого решения задачи А корректно определён.*[3]

Введём обозначения для двух зависящих от слабого решения задачи А подобластей:

$$\Omega_- := \{\boldsymbol{x} \in \Omega\colon\ |\nabla_x u| < m^{1/(p(\boldsymbol{x})-1)}\}, \quad \Omega_m := \Omega \setminus \overline{\Omega}_-.$$

[3]Далее покажем, что слабое решение задачи А существует и единственно. См. предложение 2.

Замечание 2. *Заметим, что множество M является выпуклым и содержит начало координат, т.е. $(0,0,\dots,0)^t \in M$. В силу этого, в смысле теории распределений вариационное неравенство (7b) эквивалентно в Ω_- $p(\boldsymbol{x})$-эллиптическому уравнению с нелинейным младшим слагаемым:*

$$-\operatorname{div}_x\big(|\nabla_x u|^{p(\boldsymbol{x})-2}\nabla_x u\big) + |u|^{\sigma(\boldsymbol{x})-2}u - f = 0. \tag{8}$$

В Ω_1 (при $\Omega_1 \neq \emptyset$) неравенство (7b) к равенству (8), вообще говоря, не сводится и сохраняет свой вид с $|\nabla_x u| \equiv m^{1/(p(\boldsymbol{x})-1)}$.

Введём обозначение для класса искомых решений u:

$$\mathcal{M} := \big\{\varphi \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)\colon\ |\nabla_x\varphi| \le m^{1/(p(\boldsymbol{x})-1)} \text{ п.в. в } \Omega\big\}. \tag{9}$$

Замечание 3. *Множество $\mathcal{M}$ состоит из достаточно регулярных функций. Действительно, для $\varphi \in \mathcal{M}$ имеет место оценка*

$$|\nabla_x\varphi| \le m^{1/(p(\boldsymbol{x})-1)} \le \begin{cases} 1 & \text{при } \ m \le 1, \\ m^{1/(p^- -1)} & \text{при } \ m > 1 \end{cases} \qquad \text{п.в. в } \Omega,$$

в силу которой по второй теореме вложения Соболева [21, глава I, теорема 1.2] имеем, что $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ и оператор естественного вложения $\mathcal{M}$ в $W_0^{1,\infty}(\Omega)$ непрерывен, а по первой теореме вложения Соболева [21, глава I, теорема 1.1] имеем, что φ можно доопределить до непрерывной в $\overline{\Omega}$ функции.

*В частности, для любой $\boldsymbol{x}_0 \in \partial\Omega$ имеем, что $\operatorname{ess}\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}} \varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ для **любой** последовательности $\{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{x} \in \Omega\}$.*

Справедливость двух следующих утверждений непосредственно вытекает из хорошо известных положений выпуклого анализа и теории вариационных неравенств для монотонных операторов [22, глава III, теорема 1.4], [20, глава I, предложение 5.5; глава II, предложение 2.1].

Предложение 1. *Функция $u \in \mathcal{M}$ является слабым решением задачи A в смысле определения 1 тогда и только тогда, когда она доставляет инфимум на $\mathcal{M}$ функционалу*

$$F(v) = \int_\Omega \left(\frac{1}{p(\boldsymbol{x})}|\nabla_x v|^{p(\boldsymbol{x})} + \frac{1}{\sigma(\boldsymbol{x})}|v|^{\sigma(\boldsymbol{x})}\right) d\boldsymbol{x} - \langle f, v\rangle, \tag{10}$$

то есть, когда

$$F(u) = \inf_{v\in\mathcal{M}} F(v). \tag{11}$$

Здесь обратим внимание на то, что производная по Гато $F'\colon W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \mapsto W^{-1,p'(\cdot)}(\Omega)$ функционала $F\colon W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ определяется формулой

$$\langle F'(v), \varphi\rangle = \int_\Omega \big(|\nabla_x v|^{p(\boldsymbol{x})-2}\nabla_x v\cdot\nabla_x\varphi + |v|^{\sigma(\boldsymbol{x})-2}v\varphi\big)\, d\boldsymbol{x} - \langle f, \varphi\rangle \quad \forall\, v, \varphi \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega),$$

откуда следует, что в смысле теории распределений она эквивалентна левой части уравнения (8).

Предложение 2. *При любом заданном $f \in W^{-1,p'(\cdot)}(\Omega)$ задача A имеет единственное слабое решение в смысле определения 1.*

3. Функция штрафа А. Каплана

Кратко напомним, что для какого-либо замкнутого выпуклого непустого подмножества $\mathcal{K}$ рефлексивного банахова пространства $\mathcal{V}$ *оператором штрафа, связанным с* $\mathcal{K}$, называется любой оператор $\beta\colon \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}^*$, обладающий следующими свойствами:

$$\beta\colon\ \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}^* \quad \text{— монотонный, ограниченный и полунепрерывный оператор,} \tag{12a}$$

$$\{\phi\colon\ \phi \in \mathcal{V},\ \beta(\phi) = 0\} = \mathcal{K}. \tag{12b}$$

Рассмотрим для некоторого дифференцируемого по Гато строго выпуклого функционала $\Psi\colon \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}$ задачу минимизации:

$$\text{найти} \quad u \in \mathcal{K} \quad \text{такую, что} \quad \Psi(u) = \inf_{\phi\in\mathcal{K}} \Psi(\phi). \tag{13}$$

Задача

$$\Psi'(u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) = 0, \quad u_\varepsilon \in \mathcal{K} \quad (\varepsilon > 0), \tag{14}$$

в постановке которой β — оператор штрафа, связанный с $\mathcal{K}$, называется *задачей со штрафом, ассоциированной с задачей* (13). Предположим дополнительно, что нормы в $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}^*$ *строго* выпуклы.[4] Известно [23, глава III, §5], что при сделанных выше предположениях операторы штрафа существуют, задача (14) однозначно разрешима при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, 1)$ и последовательность её решений u_ε слабо в $\mathcal{V}$ сходится к единственному решению $u \in \mathcal{K}$ задачи (13).

Оператор штрафа β, вообще говоря, можно определять различными способами и вопрос выбора «наилучшего» оператора является весьма тонким, а ответ на него неочевиден. В настоящей статье для построения приближённых решений задачи A методом штрафа примéним модификацию функции штрафа с внутренней регуляризацией, предложенной А. Капланом (оригинальную конструкцию оператора штрафа А. Каплана см. в [10, глава III, §3.4, формула (3.44)]) и получившей широкое применение при изучении нелинейных задач вариационного исчисления с ограничениями [10, 16, 24–26].

Определение 2. Интегральной функцией штрафа А. Каплана*, связанной с множеством* $\mathcal{M}$ *(определённым формулой* (9) *выше), называется функционал* $\Phi^{(t)}_\varepsilon$*:* $W^{1,p(\cdot)}_0(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$*, определённый формулой*

$$\Phi^{(t)}_\varepsilon(\varphi) = \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon(p(\boldsymbol{x})-1)}\left(|\nabla_x\varphi|^{p(\boldsymbol{x})-1} - m + \sqrt{(|\nabla_x\varphi|^{p(\boldsymbol{x})-1} - m)^2 + \varepsilon^{2+t}}\right) d\boldsymbol{x}, \quad \varepsilon > 0,\ t \geq 0. \tag{15}$$

Введём обозначение для внутренности множества $\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{int}\mathcal{M} := \bigl\{\, &\varphi \in W^{1,p(\cdot)}_0(\Omega) \cap \mathcal{M}\colon \\ &\exists\, \delta = \text{const} \in (0,1),\ \text{т.ч. } |\nabla_x\varphi|^{p(\boldsymbol{x})-1} \leq m - \delta \text{ при п.в. } \boldsymbol{x} \in \Omega \bigr\}. \end{aligned} \tag{16}$$

[4]Заметим, что нормы в $W^{1,p(\cdot)}_0(\Omega)$ и $W^{-1,p'(\cdot)}(\Omega)$ $(1 < p^- \leq p(\boldsymbol{x}) \leq p^+ < +\infty)$ строго выпуклы, вследствие соотношений (4) и выпуклости функционала $\mathfrak{A}_{p(\cdot)}$.

Функционал $\Phi_\varepsilon^{(t)}$ обладает следующими основными свойствами.

Предложение 3. *Семейство* $\{\Phi_\varepsilon^{(t)}\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ *удовлетворяет следующим требованиям:*

(i) $\Phi_\varepsilon^{(t)}$ *— выпуклые функционалы,*

(ii) $\Phi_\varepsilon^{(t)}(\varphi) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \ \ \forall\,\varphi\in \operatorname{int}\mathcal{M}$*,*

(iii) $\Phi_\varepsilon^{(t)}(\varphi) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} +\infty \ \ \forall\,\varphi\in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)\setminus\mathcal{M}$*.*

(iv) *При фиксированных* $\varepsilon>0$ *и* $t\geq 0$ *функционал* $\Phi_\varepsilon^{(t)}$ *дифференцируем по Гато; его производная* $(\Phi_\varepsilon^{(t)})'\colon W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)\mapsto W^{-1,p'(\cdot)}(\Omega)$ *определяется формулой*

$$\langle(\Phi_\varepsilon^{(t)})'(\varphi),\psi\rangle = \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega\left(1+\frac{|\nabla_x\varphi|^{p(\boldsymbol{x})-1}-m}{\sqrt{(|\nabla_x\varphi|^{p(\boldsymbol{x})-1}-m)^2+\varepsilon^{2+t}}}\right)|\nabla_x\varphi|^{p(\boldsymbol{x})-3}\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\psi\,d\boldsymbol{x} \quad \forall\,\varphi,\psi\in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega). \tag{17}$$

Доказательство. Обоснование утверждений (i)–(iii) проводится непосредственной проверкой, аналогично доказательству для конечной (неинтегральной) функции штрафа А. Каплана в [14], [10, глава III, §3.4]. Обоснование утверждения (iv) заключается в непосредственном вычислении производной по Гато. □

Замечание 4. *Оператор* $\beta_\varepsilon^{(t)} := \varepsilon(\Phi_\varepsilon^{(t)})'$ *можно назвать* приближённым оператором штрафа А. Каплана*, а задачу*

$$F'(u_\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\beta_\varepsilon^{(t)}(u_\varepsilon)=0,\quad u_\varepsilon\in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega),\quad \varepsilon>0 \tag{18}$$

— задачей с приближённым (по А. Каплану) штрафом, ассоциированной с задачей А.

Так же, как и решение «абстрактной» задачи (14), решение задачи (18) понимается в слабом смысле.

Определение 3. Слабым решением *задачи* (18) *называется функция* $u_\varepsilon\in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$*, удовлетворяющая интегральному равенству*

$$\int_\Omega\left(|\nabla_x u_\varepsilon|^{p(\boldsymbol{x})-2}\nabla_x u_\varepsilon\cdot\nabla_x\varphi+|u_\varepsilon|^{\sigma(\boldsymbol{x})-2}u_\varepsilon\varphi\right)d\boldsymbol{x} + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega\left(1+\frac{|\nabla_x u_\varepsilon|^{p(\boldsymbol{x})-1}-m}{\sqrt{(|\nabla_x u_\varepsilon|^{p(\boldsymbol{x})-1}-m)^2+\varepsilon^{2+t}}}\right)|\nabla_x u_\varepsilon|^{p(\boldsymbol{x})-3}\nabla_x u_\varepsilon\cdot\nabla_x\varphi\,d\boldsymbol{x}=\langle f,\varphi\rangle \quad \forall\,\varphi\in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega). \tag{19}$$

Замечание 5. *Обратим внимание на то, что сам оператор $\beta_\varepsilon^{(t)}$, строго говоря, не является оператором штрафа, связанным с множеством $\mathcal{M}$. Более того, для любой функции $\varphi \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ имеем, что*

$$\beta_\varepsilon^{(t)}(\varphi) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \beta^{(t)}(\varphi) \text{ сильно (т.е. равномерно в операторной норме) в } W^{-1,p'(\cdot)}(\Omega), \tag{20}$$

где $\beta^{(t)}$ определяется формулой

$$\langle \beta^{(t)}(\varphi), \psi\rangle = \int_{\{\boldsymbol{x}:\, |\nabla_x\varphi| = m^{1/(p(\boldsymbol{x})-1)}\}} m^{(p(\boldsymbol{x})-3)/(p(\boldsymbol{x})-1)} \nabla_x\varphi \cdot \nabla_x\psi \, d\boldsymbol{x} + \int_{\{\boldsymbol{x}:\, |\nabla_x\varphi| > m^{1/(p(\boldsymbol{x})-1)}\}} 2|\nabla_x\varphi|^{p(\boldsymbol{x})-3}\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\psi\, d\boldsymbol{x} \quad \forall\, \varphi,\psi \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega). \tag{21}$$

Обозначим

$$\mathcal{M}_0 := \big\{\varphi \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega):\ |\nabla_x\varphi| < m^{1/(p(\boldsymbol{x})-1)} \text{ п.в. в } \Omega\big\}. \tag{22}$$

Из (21) очевидно, что

$$\big\{\varphi \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega):\ \beta^{(t)}(\varphi) = 0\big\} = \mathcal{M}_0, \tag{23}$$

то есть предельный оператор штрафа связан с незамкнутым в $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ выпуклым множеством $\mathcal{M}_0$, замыканием которого в $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ является множество $\mathcal{M}$.

Ввиду этого замечания предельный переход при $\varepsilon \to 0$ в задаче (18) является несколько более деликатным, чем в классической монографии [23, глава 3, теорема 5.2]. Результаты о разрешимости задачи (18) при фиксированных $\varepsilon > 0$, предельном переходе в этой задаче при $\varepsilon \to 0$ и усиленном свойстве аппроксимации решения задачи A с помощью семейства $\{u_\varepsilon\}$ излагаются в следующем параграфе в виде трёх теорем.

4. Разрешимость задачи со штрафом. Аппроксимация решений задачи A

Первый основной результат работы состоит в следующем.

Теорема 1.

(i) При любом фиксированном $\varepsilon \in (0,1)$ и для любого заданного $f \in W^{-1,p'(\cdot)}(\Omega)$ существует единственное слабое решение u_ε задачи (18) в смысле определения 3.

(ii) Пусть $t \geq 0$. Тогда имеет место предельное соотношение

$$u_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} u \quad \text{слабо в } W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega), \tag{24}$$

в котором $u \in \mathcal{M}$ — это слабое решение задачи A.

Доказательство. Обоснование теоремы проводится систематическим применением известных методов решения нелинейных задач для монотонных и псевдомонотонных операторов [23, глава 2], инструментария теории пространств Лебега и Соболева с переменными показателями [8, глава 1] и теории интеграла Лебега [27, глава V, §5], [28, §§1.3-1.4]. Обоснование предельного перехода при $\varepsilon \to 0+$ в целом опирается на рассуждение из [19, section 3, proof of theorem 1] с естественными модификациями, связанными со спецификой структуры функции штрафа. □

Следующие тонкие и нестандартные свойства семейства $\{u_\varepsilon\}$ имеют место благодаря конструкции функции штрафа А. Каплана. Для того, чтобы их сформулировать, введём в рассмотрение некоторые зависящие от решения задачи (18) подмножества в Ω.

Для $\varepsilon, \delta \in (0,1)$ обозначим

$$\begin{aligned}
\Omega_-(\varepsilon) &:= \left\{\boldsymbol{x} \in \Omega\colon\ |\nabla_x u_\varepsilon|^{p(\boldsymbol{x})-1} < m\right\},\\
\Omega_+(\varepsilon) &:= \left\{\boldsymbol{x} \in \Omega\colon\ |\nabla_x u_\varepsilon|^{p(\boldsymbol{x})-1} \geq m\right\},\\
\Omega_-(\varepsilon,\delta) &:= \left\{\boldsymbol{x} \in \Omega\colon\ |\nabla_x u_\varepsilon|^{p(\boldsymbol{x})-1} \leq m-\delta\right\},\\
\Omega_1(\varepsilon,\delta) &:= \left\{\boldsymbol{x} \in \Omega\colon\ m-\delta < |\nabla_x u_\varepsilon|^{p(\boldsymbol{x})-1} < m\right\}.
\end{aligned}$$

Замечание 6. *Очевидно, множества $\Omega_+(\varepsilon)$, $\Omega_-(\varepsilon,\delta)$ и $\Omega_1(\varepsilon,\delta)$ попарно не пересекаются и $\Omega_+(\varepsilon) \cup \Omega_-(\varepsilon,\delta) \cup \Omega_1(\varepsilon,\delta) = \Omega$ для всех $\varepsilon,\delta \in (0,1)$.*

Теперь с помощью теорем Рисса и Егорова из теории измеримых по Лебегу функций [29, глава IV, §3, теоремы 4 и 5], следуя изложению в [19, proof of theorem 2] с естественными модификациями, находим важное геометрическое свойство, которое имеет место в силу структуры оператора штрафа $(\Phi_\varepsilon^{(t)})'(u_\varepsilon)$.

Теорема 2. *Существует возрастающая по включению*[5] *последовательность замкнутых множеств $\{E^{\varepsilon_l}\}$, $\varepsilon_l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0$, таких, что*

(i) $E^{\varepsilon_l} \subset \Omega_-(\varepsilon_l, \varepsilon_l^{1+t/2})$, $l = 1,2,3,\ldots$,

(ii) $\operatorname{meas}(\Omega \setminus E^{\varepsilon_l}) \leq \varepsilon_{l-1}$. *В частности,* $\operatorname{meas}\left(\Omega \setminus \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} E^{\varepsilon_l}\right) = 0$.

В формулировке теоремы 2 через $\operatorname{meas}\mathcal{Q}$ обозначается мера Лебега какого-либо измеримого (по Лебегу) множества $\mathcal{Q}$.

Установленные в теореме 2 свойства позволяют установить результат о равномерной сходимости семейства $\{u_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \to 0+$. Следующая теорема составляет второй основной результат работы.

Теорема 3. (О равномерной сходимости.) *Для любого $\delta > 0$ найдутся число $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta) \in (0,1)$ и замкнутое множество $\Xi^\delta \subset \Omega$, $\operatorname{meas}\Xi^\delta > \operatorname{meas}\Omega - \delta$, такие, что $u_\varepsilon \in C^{0+\vartheta}(\Xi^\delta)$ $\forall\,\vartheta \in [0,1)$, $\forall\,\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ и*

$$u_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\rightrightarrows} u \text{ в } C(\Xi^\delta) \text{ (то есть, равномерно в } C(\Xi^\delta)). \tag{25}$$

Через $C^{0+\vartheta}(\Xi^\delta)$ в формулировке теоремы стандартно обозначено пространство непрерывных по Гёльдеру функций на множестве Ξ^δ с показателем ϑ; $C^{0+0}(\Xi^\delta) := C(\Xi^\delta)$.

Доказательство. По теореме 2 в качестве Ξ^δ можно взять E^{ε_l} при $\varepsilon_{l-1} \leq \delta$. По второй теореме вложения Соболева получаем, что семейство $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$ равномерно ограничено в $C^{0+\vartheta}(\Xi^\delta)$ $(\forall\,\vartheta \in [0,1))$. Значит, оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно в $C(\Xi^\delta)$. С другой стороны, в силу предельного соотношения (24) и первой теоремы вложения Соболева $u_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} u$ сильно в $L^q(\Xi^\delta)$ при любом $q \in [1,\infty)$. Отсюда по теореме Асколи — Арцела [30, §7.5.7] сразу следует (25). Остаётся заметить, что (25) выполняется для ***любой*** последовательности $\varepsilon \to 0$ вследствие единственности слабого решения задачи А и задачи (18), см. предложение 2 и теорему 1.

Теорема 3 доказана. □

[5] То есть $E^{\varepsilon_n} \subset E^{\varepsilon_m}$ при $m > n$.

Список литературы

1. Acerbi E., Mingione G. Regularity results for electrorheological fluids: the stationary case // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. — 2002. — Vol. 334. — P. 817–822.

2. Acerbi E., Mingione G., Seregin G.A. Regularity results for parabolic systems related to a class of non-Newtonian fluids // Ann. Inst. H. Poincaré. — 2004. — Vol. 21. — P. 25–60.

3. Antontsev S.N., Rodrigues J.F. On stationary thermo-rheological viscous flows // Ann. Univ. Ferrara. — 2006. — Vol. 52. — P. 19–36.

4. Ružička M. Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory // Lecture Notes in Mathematics. Vol.1748. — Berlin : Springer, 2000. — xv+176 p.

5. Aboulaich R., Meskine D., Souissi A. New diffusion models in image processing // Comput. Math. Appl. — 2008. — Vol. 56. — P. 874–882.

6. Chen Y., Levine S., Rao M. Variable exponent, linear growth functionals in image resoration // SIAM J. Appl. Math. — 2006. — Vol. 66. — P. 1383–1406.

7. Guo Z., Liu Q., Sun J., Wu B. Reaction-diffusion systems with $p(x)$-growth for image denoising // Nonlinear Anal. Real World Appl. — 2011. — Vol. 12. — P. 2904–2918.

8. Antontsev S.N., Shmarev S. Evolution PDEs with Nonstandard Growth Conditions: Existence, Uniqueness, Localization, Blow-up. // Atlantis Studies in Differential Equations. Vol.4. — Paris : Atlantis Press, 2015. — xvii+409 p.

9. Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Ružička M. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents // Lecture Notes in Mathematics. Vol.2017. — Berlin : Springer, 2011. — x+509 p.

10. Гроссман К., Каплан А.А. Нелинейное программирование на основе безусловной оптимизации. — Новосибирск : Наука, 1981.

11. Байокки К., Пухначёв В.В. Задачи с односторонними ограничениями для уравнений Навье — Стокса и проблема динамического краевого угла // Прикл. мех. и техн. физ. — 1990. — № 2(180). — С. 27–40.

12. Чеботарёв А.Ю. Вариационные неравенства для оператора типа Навье — Стокса и односторонние задачи для уравнений вязкой теплопроводной жидкости // Мат. заметки. — 2001. — Т. 70, № 2. — С. 296–307.

13. Facciolo G., Lecumberry F., Almansa A. et al. Constrained anisotropic diffusion and some applications // Proceedings of the British Machine Conference / Ed. by Mike Chantler, Bob Fisher and Manuel Trucco. — BMVA Press, 2006. — P. 107.1–107.10.

14. Гончарова А.В., Саженкова Т.В. Применение штрафных функций в решении экстремальных задач с ограничениями // МАК: «Математики — Алтайскому краю»: сборник трудов всероссийской конференции по математике. — Барнаул : Изд-во Алтайского гос. ун-та, 2016. — С. 33–35.

15. Саженков А.Н., Саженкова Т.В., Пронь С.П. Об исследовании одного класса штрафных функций // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию: сб. статей. - Вып. 2. / Под ред. Е.Д. Родионова. — Барнаул : Изд-во Алтайского гос. ун-та, 2016. — С. 86–88.

16. Саженкова Т.В., Саженков А.Н., Плотникова Е.А. О применении одного класса интегральных штрафных функций при решении вариационных задач // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2018. — № 1(99). — С. 123–126.

17. Саженкова Т.В., Саженков С.А. Аппроксимация решения односторонней задачи анизотропной диффузии-абсорбции // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. — 2018. — № 4. — С. 15–24.

18. Саженкова Т.В., Саженков С.А. Аппроксимация решения нестационарной односторонней задачи диффузии-абсорбции // МАК: «Математики — Алтайскому краю»: сборник трудов всероссийской конференции по математике с международным участием. — Барнаул : Изд-во Алтайского гос. ун-та, 2020. — С. 85–88.

19. Sazhenkova T.V., Sazhenkov S.A. Kaplan's penalty operator in approximation of a diffusion-absorption problem with a one-sided constraint // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2019. — Vol. 16. — P. 236–248.

20. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. — М. : Мир, 1979.

21. Решетняк Ю.Г. Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. — Новосибирск : Наука, 1982.

22. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. — М. : Мир, 1983.

23. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М. : Мир, 1972.

24. Griffin J.D., Kolda T.G. Nonlinearly constrained optimization using heuristic penalty methods and asynchronous parallel generating set search // Applied Mathematics Research eXpress. — 2010. — Vol. 2010, Issue 1. — P. 36–62.

25. Kaplan A.A. Convex programming algorithms using smoothing of exact penalty functions // Siberian Math. J. — 1982. — Vol. 23. — P. 491–500.

26. Kaplan A., Tichatschke R. Some results about proximal-like methods // Recent Advances in Optimization. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Vol.563 / Ed. by A. Seeger. — Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 2006. — P. 61–86.

27. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М. : Наука, 1981.

28. Tao T. An Introduction to Measure Theory. — AMS, 2011. — xvi+206 p.

29. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. — М. : Наука, 1974.

30. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. — М. : Мир, 1964.