УДК 512.622

Применение схемы Горнера к решению задач

М.А. Дульцева, А.С. Жукабаева, Л.В. Истомина
Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Челябинск

С теоремой Безу и схемой Горнера знакомятся еще в школе. Благодаря им, ученики могут с легкостью решать интересные и занимательные задачи: найти остаток от деления многочлена на двучлен, разложить на множители многочлен, решить уравнение используя схему Горнера и так далее. Но изучение этого материала не ограничивается школьной программой, и при поступлении в высшее учебное заведение теоретический материал и практические задания становятся глубже, рассматриваются уже не только простые примеры на закрепление, но и более сложные задания.

Фундаментальные знания теории многочленов составляют значительную часть дисциплины алгебра и необходимы в будущей профессиональной деятельности и при прохождении педагогической практики [4]. Теория многочленов служит основой для проведения научно-исследовательских работ бакалавров, применяется в реализации учебных проектов [2-3].

Сначала рассмотрим теорему Безу и её доказательство, а потом перейдем к схеме Горнера. Схема Горнера является универсальной (применима к любому многочлену) и предельно простой.

Теорема Безу. Для любых $f(x) \in K[x]$ и $c \in K$ существует многочлен $g(x) \in K[x]$ такой, что $f(x) = (x-c) \cdot g(x) + f(c)$.

Рассмотрим доказательство теоремы Безу:

$$f(x) = (x-c) \cdot g(x) + f(c)$$

Перенесем $f(c)$ в левую часть:

$$f(x) - f(c) = (x-c) \cdot g(x).$$

Распишем $f(x)$ и $f(c)$:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$
$$f(c) = a_0 + a_1c + a_2c^2 + \cdots + a_nc^n.$$

Заменим $f(x)$ и $f(c)$ на полученные равенства, вынося за скобки общие множители:

$$f(x) - f(c) = a_1(x-c) + a_2(x^2-c^2) + \cdots + a_n(x^n-c^n) =$$
$$= (x-c) \cdot g(x),$$

вынесем за скобки общий множитель $(x-c)$ и получим многочлен $g(x)$:

$$(x-c)\big(a_1+a_2(x+c)+\cdots+a_n(x^{n-1}+\cdots+c^{n-1})\big)=(x-c)\cdot g(x),$$

$$g(x)=a_1+a_2(x+c)+\cdots+a_n(x^{n-1}+\cdots+c^{n-1}),$$

причем $\deg g(x) < \deg f(x)$.

Число $c \in K$ – корень $f(x)$, если $f(c)=0$.

Если c – корень многочлена $f(x)=(x-c)\cdot g(x)$, то $f(x)$ делится на $x-c$ [1, с. 15].

Схема Горнера позволяет найти коэффициенты $g(x)$.

Распишем $g(x)$: $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_{n-2}x^{n-2}+b_{n-1}x^{n-1}$

Для того чтобы найти коэффициенты $g(x)$ нужно в равенство теоремы Безу подставить значение многочлена $g(x)$:

$$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=(x-c)(\,b_0+b_1x+\cdots+b_{n-2}x^{n-2}+$$
$$+b_{n-1}x^{n-1})+f(c).$$

Раскрывая скобки справа, сравним коэффициенты левой и правой частей:

$$n:\ \ a_n=b_{n-1}$$
$$n-1\ :\ \ a_{n-1}=b_{n-2}-c\cdot b_{n-1}$$
$$n-2\ :\ \ a_{n-2}=b_{n-3}-c\cdot b_{n-2}$$
$$a_k=b_{k-1}-c\cdot b_k$$

Получаем общую формулу коэффициентов: $b_{k-1}=a_k+c\cdot b_k$

Для разложения многочлена по степеням двучлена $(x-c)$ составим таблицу последовательного деления по схеме Горнера на двучлен.

Таблица 1 – Последовательное деления по схеме Горнера на двучлен

	a_n	a_{n+1}	a_{n+2}	$\cdots$	a_1	a_0
c	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_0	r_1
c	d_{n-2}	d_{n-3}	d_{n-4}	d_0	r_2	
$\vdots$						
c	γ_0	r_n				
c	r_{n+1} $=a_n$					

$$f(x)=\ (x-c)\cdot g_1(x)+r_1;$$
$$g_1(x)=\ (x-c)\cdot g_2(x)+r_2;$$
$$\cdots$$
$$g_{n-1}(x)=\ (x-c)\cdot g_n(x)+r_n;$$
$$g_n(x)=\ r_{n+1}.$$

Таким образом: $f(x)=r_1+r_2(x-c)+\cdots+r_{n+1}(x-c)^n$.

Рассмотрим два примера для более наглядного применения схемы Горнера.

Пример 1. Разложить по степеням двучлена $(x-2)$ многочлен

$$f(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 7x + 5.$$

Решение: делим по схеме Горнера многочлен $f(x)$ на $x-2$, затем полученное частное на $x-2$, затем следующее частное на $x-2$ и т.д. (всего 5 раз). Тогда полученные остатки r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 равны соответственно свободному члену и коэффициентам при $x-2$, $(x--2)^2, (x-2)^3, (x-2)^4$.

Таблица 2 – Последовательное деление по схеме Горнера многочлена $f(x)$ на $x-2$

	2	-5	3	-7	5
2	2	-1	1	-5	-5
2	2	3	7	9	
2	2	7	21		
2	2	11			
2	2				

Ответ: $f(x) = 2(x-2)^4 + 11(x-2)^3 + 21(x-2)^2 + 9(x-2) - 5$

Пример 2. Разложить на простейшие дроби рациональную дробь

$$\frac{x^3 + 2x - 3}{(x+3)^4}.$$

Решение: разложим числитель $f(x) = x^3 + 2x - 3$ по степеням $x + 3$ по формуле Тейлора, используя 4 раза схему Горнера.

Таблица 3 – Последовательное деления по схеме Горнера на двучлен

	3	0	2	-3
-3	1	-3	11	-36
-3	1	-7	29	
-3	1	-9		
-3	1			

$$f(x) = (x+3\,)^3 - 9(x+3)^{\,2} + 29(x+3) - 36.$$

Подпишем знаменатель под каждым членом числителя, сократим дроби и получим ответ:

$$\frac{x^3+2x-3}{(x+3)^4}=\frac{1}{x+3}-\frac{9}{(x+3)^2}+\frac{29}{(x+3)^3}-\frac{36}{(x+3)^4}.$$

Библиографический список

1. Винберг Э.Б. Алгебра многочленов. – М., 1980. – 176 с.

2. Севостьянова С.А., Мартынова Е.В., Нигматулин Р.М., Шумакова Е.О. Формирование проектных умений будущих учителей математики при выполнении методических проектов / Современные наукоемкие технологии. 2019. № 10-2. С. 360-365.

3. Шумакова Е.О., Миссаль В.В. Применение технологии учебных проектов при изучении профильных математических дисциплин / Современные проблемы науки и образования. 2019. № 6. С. 3.

4. Шумакова Е.О., Севостьянова С.А., Вагина М.Ю. Формирование профессиональных компетенций бакалавров при изучении дисциплины "Алгебра" / Современные проблемы науки и образования. 2019.№ 5. С. 45.

УДК 574.34:575.174.4

Особенности динамики модели эволюции двухвозрастной популяции

В.С. Жданов[1], О.Л. Жданова[2], Е.Я. Фрисман[3]

[1]ДВФУ, г. Владивосток; [2]ИАПУ ДВО РАН, г. Владивосток;

[3]ИКАРП ДВО РАН, г. Биробиджан

Простейшие модели лимитированных популяций, построенные на классических для математической биологии уравнениях, демонстрируют удивительно сложную динамику [1-3]. При этом эффект мульти-стабильности, который выражается в одновременном сосуществовании в системе различных предельных режимов динамики, а переход к ним определяется выбором начальных условий [4], позволяет объяснить случаи смены динамических режимов, наблюдаемые в реальных биологических популяциях (напр., [5-7]).

Эколого-генетические модели обладают естественной мультиста-бильностью, т.к. весьма часто имеют несколько генетически различных равновесий и переход между ними в ряде параметрических областей определяется начальными условиям [8-9]. Этот эффект имеет важное эволюционное значение, т.к. направление эволюции популяции в таком