УДК 517.965

О плоскостности поверхности в евклидовом пространстве

Поликанова И.В.
Алтайский государственный педагогический университет, г. Барнаул
anirix1@yandex.ru

Аннотация

В статье приводится признак плоскостности m-мерной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$, опирающийся на полученный автором ранее критерий выпуклости замкнутого множества в аффинном пространстве.

Основной результат: m-мерная поверхность, являющаяся замкнутым множеством в $\mathbb{E}^n$, будет m-мерным выпуклым множеством (а следовательно, плоскостной), тогда и только тогда, когда барицентр всякого k-мерного симплекса с вершинами на поверхности также принадлежит поверхности при фиксированном целом значении k, $1 \le k \le m$.

Доказательство использует сходимость симплексов к отрезку. Высказана гипотеза о плоскостности m-мерной поверхности.

Ключевые слова: Поверхность в евклидовом пространстве, плоскостность поверхности, симплекс, барицентр.

1. Введение

В статье приводятся доказательства новых утверждений, анонсированных в тезисах конференции [1].

Плоскостность – это степень приближения формы поверхности к плоскости, а *прямолинейность* – степень приближения кривой к прямой. Данные термины используются преимущественно в инженерной практике с точки зрения оценки отклонения поверхности изделия от идеальных форм, для чего разработаны методы тестирования, система допусков, специальные инструменты [2]. Важность такой оценки обусловлена необходимостью правильного функционирования машин и оборудования либо эстетическими соображениями.

В математике плоскостность и прямолинейность рассматриваются скорее как отсутствие кривизны.

Мы под плоскостностью поверхности будем понимать вместимость поверхности в плоскость той же размерности, т.е. поверхность представляет собой невырожденную (по размерности) часть плоскости.

Ранее автор выявил ряд дифференциальных признаков того, что гладкая кривая класса C^{k+1} в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ является k-*плоской*, т.е. содержится в плоскости размерности $k < n$ [3]:

1. все точки линии являются точками уплощения порядка k,

2. касательная прямая во всех точках линии параллельна фиксированной k-мерной плоскости,

3. во всех точках линии существуют соприкасающиеся плоскости k-ого порядка, и все они параллельны фиксированной прямой,

4. линия обладает свойством аффинной эквивалентности дуг, и содержит точку уплощения k-ого порядка.

В [4] автор приводит признаки прямолинейности кривой в $\mathbb{E}^n$, не предполагающие её гладкость:

1. всякие 2 ориентированные дуги с общим (нефиксированным) началом подобны,

2. все дуги с фиксированным началом O подобны, а в точке O существует полукасательная, если точка O краевая, или касательная, если точка O – внутренняя точка кривой.

В [5] автор обосновывает прямолинейность кривой в $\mathbb{E}^n$ тем обстоятельством, что она представляет собой выпуклое множество: *кривая в $\mathbb{E}^n$ прямолинейна тогда и только тогда, когда всякая её хорда пересекает стягиваемую ею дугу в своей внутренней точке.*

В настоящей работе, опираясь на те же соображения и критерий выпуклости замкнутого множества, автор устанавливает признак того, что m-мерная поверхность, будучи замкнутым множеством в $\mathbb{E}^n$ является плоскостной. На самом деле доказывается несколько более сильный факт, именно: поверхность является выпуклым множеством в $\mathbb{E}^n$, что и влечёт её плоскостность.

2. Признак плоскостности поверхности

Уточним некоторые понятия и обозначения. Точки пространства будем обозначать малыми буквами латинского алфавита, а соответствующие им радиусы-векторы – теми же буквами жирным шрифтом.

Под *m-мерной поверхностью* будем понимать связное m-мерное многообразие с краем или без края ($m < n$). m-мерную поверхность в $\mathbb{E}^n$ назовём *k-плоской*, если она содержится в k-мерной плоскости, $m \le k$. m-плоскую m-мерную поверхность назовём *плоскостной*, а при $m = 1$ *прямолинейной кривой.*

Хорда поверхности – всякий отрезок с концами на поверхности.

k-мерным симплексом в $\mathbb{E}^n$ с вершинами в *точках общего положения* x_0, x_1, ..., x_k, т.е. таких, что векторы $\overrightarrow{x_0x_1} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$, ..., $\overrightarrow{x_0x_k} = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0$ линейно независимы, называется множество

$$S(x_0, x_1, \ldots, x_k) = \left\{ x \mid \mathbf{x} = p_0\mathbf{x}_0 + p_1\mathbf{x}_1 + \ldots + p_k\mathbf{x}_k \text{ при } p_i \ge 0,\ i = 0, 1, \ldots, k,\ \sum_{i=1}^{k} p_i = 1 \right\}.$$

Иными словами, симплекс – это выпуклая оболочка его вершин, находящихся в общем положении. Одномерный симплекс – это прямолинейный отрезок. Точка симплекса называется *внутренней*, если все её барицентрические координаты $p_i > 0$.

Барицентром (центром масс) симплекса $S(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ называется точка с радиус-вектором

$$\frac{1}{k+1}\left(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_k\right).$$

Барицентр симплекса является его внутренней точкой.

Обоснование критерия плоскостности поверхности опирается на теорему 1 и вытекающую из неё лемму 1.

Теорема 1 (Критерий выпуклости замкнутого множества [5])**.** *Замкнутое множество $X \subset \mathbb{E}^n$ выпукло тогда и только тогда, когда всякий отрезок с концами в X содержит по крайней мере ещё одну точку этого множества.*

Лемма 1. *Если всякая хорда m-мерной поверхности, являющейся замкнутым множеством в $\mathbb{E}^n$, содержит ещё какую-либо точку поверхности, отличную от своих концов, то поверхность является m-мерной плоскостью или её выпуклым подмножеством с непустой внутренностью относительно этой плоскости.*

Доказательство. Пусть m-мерная поверхность обладает указанным в теореме свойством. Тогда согласно теореме 1 она является выпуклым множеством. Если бы на ней имелось $m+2$ точек общего положения, то, будучи выпуклым множеством, поверхность содержала бы и $(m+1)$-мерный симплекс с вершинами в этих точках, что противоречило бы m-мерности поверхности. Значит, m-мерная поверхность содержится в m-мерной плоскости, т.е. является подмногообразием m-мерной плоскости. Поэтому имеет непустую внутренность относительно этой плоскости. □

Лемма 2. *Пусть имеется последовательность симплексов $S_i = S(x_0, x_1, x_{2i}, \dots, x_{ki})$, вершины которых x_{ji} сходятся к x_1 при $i \to \infty$ для каждого $j = 2, \dots, k$. Тогда барицентры этих симплексов сходятся к точке отрезка $[x_0, x_1]$, делящей его в отношении $k : 1$, считая от точки x_0.*

Доказательство. Пусть (b_i) – последовательность барицентров симплексов S_i, описанных в лемме 2. Так как в присоединённом к пространству $\mathbb{E}^n$ топологическом векторном пространстве V^n операции сложения векторов и умножения вектора на действительное число непрерывны, то утверждение легко усматривается из следующей цепочки действий:

$$\mathbf{b}_i = \frac{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_{2i} + \ldots + \mathbf{x}_{ki}}{k+1} \to \frac{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_1}{k+1} = \frac{\mathbf{x}_0 + k\mathbf{x}_1}{k+1}.$$

□

Замечание. В формулировке леммы 2 в [1] допущена неточность (там указано, что предельная точка делит отрезок $[x_0, x_1]$ в отношении $(k+1) : 1$).

Теорема 2. *Пусть P – m-мерная поверхность, являющаяся замкнутым множеством в $\mathbb{E}^n$, k – фиксированное целое число, $1 \leq k \leq m$. Если барицентр всякого k-мерного симплекса с вершинами в P также принадлежит P, то поверхность P является m-мерным выпуклым множеством, а следовательно, плоскостна.*

Доказательство. Пусть P – m-мерная поверхность в $\mathbb{E}^n$ такая, что барицентр любого k-мерного симплекса с вершинами в P также принадлежит P, где k – фиксированное целое число, $1 \leq k \leq m$, и P – замкнутое множество. Случай $k = 1$ вытекает из леммы 1, поскольку барицентр прямолинейного отрезка является его серединой.

Пусть теперь $2 \leq k \leq m$. Идея доказательства заключается в том, чтобы данный случай свести к ситуации, описанной в лемме 1, благодаря тому, что для любого отрезка с концами в точках поверхности можно выбрать последовать симплексов с вершинами на поверхности, сходящуюся к этому отрезку (в топологическом смысле). При этом барицентры симплексов будут сходиться к внутренней точке отрезка, также принадлежащей поверхности.

Возьмём произвольный отрезок $[x_0, x_1]$ с концами на поверхности P. Покажем, что в любой окрестности точки x_1 на поверхности найдутся точки $x_2, \dots, x_k$ такие, что точки $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ находятся в общем положении. Допустим противное. Тогда на поверхности P найдётся окрестность U точки x_1 такая, что для любых точек $x_2, \dots, x_k$ из U размерность линейной оболочки, натянутой на систему векторов $\overrightarrow{x_0x_1}$, $\overrightarrow{x_0x_2}$, $\dots$, $\overrightarrow{x_0x_k}$, меньше k. Пусть l – наибольшая из размерностей всех таких линейных оболочек по всевозможным наборам из $k-1$ точек окрестности U. Тогда в U существуют точки $y_2, \dots, y_l$ такие, что вместе с точками x_0, x_1 они находятся в общем положении. Пусть σ – проходящая через точки $x_0, x_1, y_2, \ldots, y_l$ l-мерная плоскость. Тогда U содержится в σ. Если бы это было не так, то есть некоторая точка $y \in U$ не лежала бы в σ, то линейная оболочка векторов $\overrightarrow{x_0x_1}$, $\overrightarrow{x_0y_2}$, …, $\overrightarrow{x_0y_l}$, $\overrightarrow{x_0y}$, имела бы размерность $l+1$, что противоречило бы выбору числа l. Но окрестность U m-мерной поверхности не может содержаться в плоскости размерности $l < k \leq m$. Пришли к противоречию, доказывающему, что в любой окрестности точки x_1 на поверхности P можно выбрать набор из $k-1$ точек, находящихся совместно с x_0, x_1 в общем положении. Пусть (U_i) – система окрестностей точки x_1 такая, что каждая окрестность U_i содержится в открытом шаре с центром x_1 и радиуса $\frac{1}{i}$. По доказанному выше для каждого $i = 1, 2, \ldots$ существует симплекс $S_i = S(x_0, x_1, x_{2i}, \ldots, x_{ki})$, вершины которого $x_{2i}, \ldots, x_{ki} \in U_i$. Тогда вершины x_{ji} сходятся к x_1 при $i \to \infty$ для каждого $j = 2, \ldots, k$. По лемме 2 последовательность (b_i) барицентров симплексов (S_i) сходится к внутренней точке b отрезка $[x_0, x_1]$. По условию теоремы $b_i \in P$ при всех $i = 1, 2, \ldots$. Так как поверхность P является замкнутым множеством в $\mathbb{E}^n$, то $b \in P$. По лемме 1 поверхность P является m-мерным выпуклым множеством. □

Возникает естественный вопрос: можно ли утверждать, что m-мерная поверхность будет выпуклым множеством, если всякий k-мерный симплекс с вершинами на поверхности содержит какую-либо отличную от вершин симплекса точку поверхности (не обязательно барицентр) при фиксированном k, $1 \leq k \leq m$?

Барицентр выбран нами, *во-первых*, потому, что имеет понятный геометрический смысл, *во-вторых*, потому, что последовательность барицентров сходится к внутренней точке отрезка. Но, возможно, при ином доказательстве это не столь необходимо?

Следующий пример показывает, что барицентр симплекса нельзя заменить на “какую-либо точку” в симплексе.

Пример 1. *Пусть 2-мерная поверхность P в $\mathbb{E}^3$ представляет собой объединение двух равных прямоугольников, имеющих общую сторону и образующих двугранный угол. Она не является выпуклым множеством, при этом у всякого треугольника (двумерного симплекса) с вершинами в P по крайней мере одна из сторон целиком содержится в P, а значит, всякий такой треугольник содержит точку поверхности P, отличную от его вершин.*

Если в формулировке теоремы 2 заменить “*барицентр*” на “*некоторую внутреннюю точку симплекса*”, то утверждение перестаёт быть верным при $1 < k \leq m$ (при $k = 1$ оно верно в силу леммы 1), как показывает следующий пример.

Пример 2. *Пусть двумерная поверхность $P \subset \mathbb{E}^3$ представляет собой объединение двух пересекающихся (более чем в одной точке) и не совпадающих замкнутых кругов, лежащих в одной двумерной плоскости. Множество P невыпукло. При этом всякий треугольник с вершинами в P содержит точки из P внутри себя. Но поверхность P в этом случае плоскостная.*

3. Заключение

Условия теоремы 2 достаточно жёсткие и обеспечивают не просто плоскостность поверхности, но и выпуклость её как множества. Хотелось бы эти условия ослабить. Пример 2 подводит к следующему вопросу.

Проблема. Можно ли утверждать: если всякий k-мерный симплекс с вершинами в m-мерной поверхности $P \subset \mathbb{E}^n$, $1 < k \leq m$, содержит точку поверхности в своей внутренности, то поверхность P плоскостная? Здесь k – фиксированное целое число. Данное утверждение равносильно следующему: если m-мерная поверхность P в $\mathbb{E}^n$ не плоскостная, то для целого k, $1 < k \leq m$, найдётся k-мерный симплекс с вершинами в P, все внутренние точки которого не принадлежат P.

Список литературы

1. Поликанова И.В. Признаки плоскостности поверхности и прямолинейности линии в евклидовом пространстве // Международная конференция "Математика в созвездии наук". К юбилею ректора МГУ академика Виктора Антоновича Садовничего : Тезисы докладов / Орг. комитет: В. А. Садовничий, А. И. Шафаревич, И. А. Соколов [и др.]. — М. : Издательство Московского университета, 2024. — С. 237–238.

2. Как измерить неплоскостность поверхности: Измерения плоскостности и прямолинейности. Технологии Обработки Металлов [Электронный ресурс]. — URL: https://kak-izmerit-neploskostnost-poverhnosti-izmereniya-ploskostnosti-i-pryamoli/nejnosti-tehnologii-obrabotki-metallov.html. Дата обращения 15.02.2024.

3. Поликанова И.В. Некоторые свойства линий с аффинно-эквивалентными дугами // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию: сб. ст. - Вып.2./главный ред-ор Е. Д. Родионов. — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2016. — С. 55–61.

4. Поликанова И.В. Кривые, у которых дуги с фиксированным началом подобны // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2023. — Т. 11. — С. 26–40. — https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-11-26-40.

5. Поликанова И.В. Критерии прямолинейности кривой // Материалы Международной конференции “Классическая и современная геометрия”, посвященной 100-летию со дня рождения профессора Левона Сергеевича Атанасяна (15 июля 1921 г.-5 июля 1998 г. Москва, 1-4 ноября 2021 г. Часть 1, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 220, ВИНИТИ РАН. — М., 2023. — С. 86–98. — https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-220-86-98.