УДК 517.965, 512.1

Мультифункции и другие функции от многих переменных

Поликанова И.В.
Алтайский государственный педагогический университет, г. Барнаул
anirix1@yandex.ru

Аннотация

The article proves the properties of some operations in the space $\mathbb{R}^n$.

Ключевые слова: Мультифункции, мультиаргумент.

1. Введение

Автором ранее в работе [1] в связи с изучением функциональных уравнений от функций многих переменных были введены понятия мультифункции и рассмотрены некоторые их свойства.

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-ая декартова степень поля действительных чисел $\mathbb{R}$, а её элементы, как цельные образования будем называть *мультиаргументами* и обозначать жирным шрифтом в отличие от вещественных координат: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Такое название связано с тем, что изначально они рассматривались нами как переменные отображений $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, хотя возможно было бы уместно название не аппилирующее к понятию функции. В дальнейшем всюду $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$.

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n |\ x_i > 0,\ i = 1, \ldots, n\} = (0, +\infty)^n,$$

$$\bar{\mathbb{R}}^n_+ = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n |\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\} = [0, +\infty)^n.$$

Функция $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, порождает отображение типа $\mathbb{R}^{kn} \to \mathbb{R}^n$ от k мультиаргументов $\mathbf{x}_{(s)} = (x_{(s)1}, x_{(s)2}, \ldots, x_{(s)n})$, $s = 1, \ldots, k$, $k = 1, 2, \ldots$, по правилу:

$$f\left(\mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{(k)}\right) = \left(f(x_{(1)1}, x_{(2)1}, \ldots, x_{(k)1}),\ \ldots\ , f(x_{(1)n}, x_{(2)n}, \ldots, x_{(k)n})\right).$$

Будем называть его *мультифункцией от k мультиаргументов*. Например:

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n), \quad \text{где} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \tag{2}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n). \tag{3}$$

Такая конструкция позволяет использовать более короткую и зримую запись для функциональных уравнений от функций многих переменных. Например, уравнение Коши от функций n переменных

$$f(x_1 y_1, \ldots, x_n y_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + f(y_1, \ldots, y_n)$$

может быть записано через мультиаргументы в виде:

$$f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}).$$

Подобная запись применялась и ранее [2, с. 4], но по отношению к мультиаргументам-векторам. О необходимости расширить диапазон действий с мультиаргументами свидетельствует применение мультифункций в частных случаях, например, при изучении периодических решений дифференциально-интегральных уравнений в работе [3], в которых используется краткая запись $t - k\omega$ для набора действительных аргументов вида

$$(t_1 - k_1\omega_1, \ldots, t_n - k_n\omega_n).$$

Решение обобщённых Йенсена-Коши функциональных уравнений показало целесообразность и некоторых других операций над мультиаргументами. Цель настоящей статьи дать полные доказательства свойств этих операций.

2. Пространство мультиаргументов $\mathbb{R}^n$

Предложение 1. *Множество $\mathbb{R}^n$ с операциями умножения мультиаргумента на действительное число и сложения мультаргументов, определёнными формулами (1), (2), является векторным пространством, т.е. выполнены свойства:*

1. $\forall_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$.
2. $\forall_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}} \quad (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$.
3. $\forall_{\boldsymbol{x}} \quad \boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$.
4. $\forall_{\boldsymbol{x}} \quad \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$.
5. $\forall_{\boldsymbol{x}} \quad 1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \quad (-1) \cdot \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$.
6. $\forall_{\boldsymbol{x}} \forall_{\lambda,\mu} \quad (\lambda\mu)\boldsymbol{x} = \lambda(\mu\boldsymbol{x})$.
7. $\forall_{\boldsymbol{x}} \forall_{\lambda,\mu} \quad (\lambda + \mu)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{x}$.
8. $\forall_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \forall_{\lambda} \quad \lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}$.

Замечание 1. *Размерность этого пространства равна n.*

Предложение 2. *Множество $\mathbb{R}^n$ с операциями сложения и умножения мультиаргументов, определёнными формулами (2), (3), является кольцом, т.е. выполнены свойства:*

1. $\forall_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$.
2. $\forall_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}} \quad (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$.
3. $\forall_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$.
4. $\forall_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}} \quad (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z})$.
5. $\forall_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}} \quad (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$.

Предложение 3. *Множество $\mathbb{R}^n_+$ с операциями сложения и умножения мультиаргументов, определёнными формулами (2), (3), является полем (т.е. является кольцом, в котором выполнимо деление на любой элемент кроме $\boldsymbol{0}$, т. е. уравнение $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ относительно неизвестного $\boldsymbol{x}$ разрешимо единственным образом при любом $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$).*

Замечание 2. *Множества* $\mathbb{R}^n$ *и* $\bar{\mathbb{R}}_+^n$ *с операциями сложения и умножения мультиаргументов, определёнными формулами* (2), (3), *не являются полями, т.к. уравнение* $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *относительно неизвестного* $\boldsymbol{x}$ *не разрешимо при всяком мультиаргументе* $\boldsymbol{a}$, *среди координат которого имеется ноль.*

Предложение 4.

1. $\boldsymbol{0} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}.$
2. $a\boldsymbol{x} = (a \cdot \boldsymbol{1}) \cdot \boldsymbol{x}.$
3. $(a\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \cdot (a\boldsymbol{x}) = a(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}).$
4. $(a\boldsymbol{x})^b = a^b \boldsymbol{x}^b.$
5. $(a)^{b\boldsymbol{x}} = \left(a^b\right)^{\boldsymbol{x}} = (a^{\boldsymbol{x}})^b.$
6. $(a\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{b}} = a^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}}.$
7. $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}}.$
8. $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})^{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{a}}.$

В предложении 1 сформулирован известный факт, проверка предложений 2,3,4 тривиальна, и мы её опускаем.

3. Некоторые операции над мультиаргументами

Понятие “операция” трактуется широко – как отображение $A^k \to B$, где A, B – произвольные множества, A^k – декартова степень множества A.

В этом разделе изучим свойства функций типа $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}_\oplus = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \qquad \mathbf{x}_\odot = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$$

и типа $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\mathbf{b} * \mathbf{x} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})_\oplus = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n.$$

$$\mathbf{x}^{\star\mathbf{b}} = \left(\mathbf{x}^{\mathbf{b}}\right)_\odot = x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{b_n}.$$

Предложение 5.

1. $\boldsymbol{0}_\oplus = 0, \quad \boldsymbol{1}_\oplus = n.$
2. $(a\boldsymbol{x})_\oplus = a\boldsymbol{x}_\oplus.$
3. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})_\oplus = \boldsymbol{x}_\oplus + \boldsymbol{y}_\oplus.$
4. $a^{\boldsymbol{x}_\oplus} = (a^{\boldsymbol{x}})_\odot.$

Доказательство. 1. Очевидно.

2. $(a\mathbf{x})_\oplus = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)_\oplus = ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_n = a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = a\mathbf{x}_\oplus$.

3. $(\mathbf{x} + \mathbf{y})_\oplus = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)_\oplus = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \ldots + (x_n + y_n) = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + (y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = \mathbf{x}_\oplus + \mathbf{y}_\oplus$.

4 $a^{\mathbf{x}_\oplus} = a^{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} \cdot \ldots \cdot a^{x_n} = (a^{x_1}, a^{x_2}, \ldots, a^{x_n})_\odot = (a^{\mathbf{x}})_\odot$. □

Предложение 6.

1. $\boldsymbol{0}_\odot = 0, \quad \boldsymbol{1}_\odot = 1.$

2. $(a\boldsymbol{x})_\odot = a^n \boldsymbol{x}_\odot.$

3. $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})_\odot = \boldsymbol{x}_\odot \cdot \boldsymbol{y}_\odot.$

4. $(\boldsymbol{x}^a)_\odot = (\boldsymbol{x}_\odot)^a.$

5. $\log_a(\boldsymbol{x}_\odot) = (\log_a \boldsymbol{x})_\oplus.$

Доказательство. 1. Очевидно.

2. $(a\mathbf{x})_\odot = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)_\odot = ax_1 \cdot ax_2 \cdot \ldots \cdot ax_n = a^n(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) = a^n \mathbf{x}_\odot.$

3. $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})_\odot = (x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n)_\odot = (x_1y_1) \cdot (x_2y_2) \cdot \ldots \cdot (x_ny_n) = (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) \cdot (y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n) = \mathbf{x}_\odot \cdot \mathbf{y}_\odot.$

4. $(\mathbf{x}^a)_\odot = (x_1^a, x_2^a, \ldots, x_n^a)_\odot = x_1^a \cdot x_2^a \cdot \ldots \cdot x_n^a = (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^a = (\mathbf{x}_\odot)^a.$

5. $\log_a(\mathbf{x}_\odot) = \log_a(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \ldots + \log_a x_n = (\log_a x_1, \log_a x_2, \ldots, \log_a x_n)_\oplus = (\log_a \mathbf{x})_\oplus.$

□

Предложение 7.

1. $\boldsymbol{0} * \boldsymbol{x} = 0. \qquad \boldsymbol{1} * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_\oplus.$

2. $\boldsymbol{b} * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} * \boldsymbol{b}.$

3. $(a\boldsymbol{b}) * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} * (a\boldsymbol{x}) = a(\boldsymbol{b} * \boldsymbol{x}).$

4. $(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} * \boldsymbol{x}.$

5. $(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} * (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x})_\oplus.$

6. $a^{\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y}} = (a^{\boldsymbol{x}})^{\star \boldsymbol{y}} = (a^{\boldsymbol{y}})^{\star \boldsymbol{x}}.$

7. $\boldsymbol{b} * \log_a c\boldsymbol{x} = \log_a(c^{\boldsymbol{b}_\oplus} \cdot \boldsymbol{x}^{\star \boldsymbol{b}}).$

Доказательство. 1. Очевидно.

2. $\mathbf{b} * \mathbf{x} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})_\oplus = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b})_\oplus = \mathbf{x} * \mathbf{b}$. Использовали предложение 2(3).

3. $(a\mathbf{b}) * \mathbf{x} = ((a\mathbf{b}) \cdot \mathbf{x})_\oplus = (a(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}))_\oplus = a(\mathbf{b} * \mathbf{x}),$
$(a\mathbf{b}) * \mathbf{x} = ((a\mathbf{b}) \cdot \mathbf{x})_\oplus = (\mathbf{b} \cdot (a\mathbf{x}))_\oplus = \mathbf{b} * (a\mathbf{x}).$
Использовали предложение 4(3) и 5(2).

4. $(\mathbf{b} + \mathbf{c}) * \mathbf{x} = ((\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot \mathbf{x})_\oplus = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{x})_\oplus = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})_\oplus + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})_\oplus = \mathbf{b} * \mathbf{x} + \mathbf{c} * \mathbf{x}.$
Использовали предложения 2(5) и 5(3).

5. $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) * \mathbf{x} = ((\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{x})_\oplus = (\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}))_\oplus = \mathbf{b} * (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}),$
$(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) * \mathbf{x} = ((\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{x})_\oplus = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{x})_\oplus.$
Использовали предложения 2(4).

6. $a^{\mathbf{x} * \mathbf{y}} = a^{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n} = a^{x_1y_1} \cdot a^{x_2y_2} \cdot \ldots \cdot a^{x_ny_n} = (a^{x_1})^{y_1} \cdot (a^{x_2})^{y_2} \cdot \ldots \cdot (a^{x_n})^{y_n} =$
$= (a^{\mathbf{x}})^{\star \mathbf{y}}$. А по предложению 2(3)
$a^{\mathbf{x} * \mathbf{y}} = a^{\mathbf{y} * \mathbf{x}} = (a^{\mathbf{y}})^{\star \mathbf{x}}.$

7. $\mathbf{b} * \log_a c\mathbf{x} =$
$b_1 \log_a cx_1 + \cdots + b_n \log_a cx_n = (b_1 \log_a c + \cdots + b_n \log_a c) + (b_1 \log_a x_1 + \cdots + b_n \log_a x_n)$
$= (\log_a c^{b_1 + \cdots + b_n}) + (\log_a x_1^{b_1} + \cdots + \log_a x_n^{b_n}) = \log_a(c^{\mathbf{b}_\oplus}) + \log_a(\mathbf{x}^{\star \mathbf{b}}) = \log_a \left(c^{\mathbf{b}_\oplus} \cdot (\mathbf{x}^{\star \mathbf{b}})\right).$ □

Предложение 8.

1. $\boldsymbol{0}^{\star \boldsymbol{x}} = 0$ *при* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+$. $\quad \boldsymbol{1}^{\star \boldsymbol{x}} = 1 = \boldsymbol{x}^{\star \boldsymbol{0}}$.
2. $(a\boldsymbol{x})^{\star \boldsymbol{b}} = a^{\boldsymbol{b}_\oplus} \boldsymbol{x}^{\star \boldsymbol{b}}$.
3. $\boldsymbol{x}^{\star(a\boldsymbol{b})} = (\boldsymbol{x}^a)^{\star \boldsymbol{b}} = \left(\boldsymbol{x}^{\star \boldsymbol{b}}\right)^a$.
4. $(\boldsymbol{x})^{\star(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})} = (\boldsymbol{x})^{\star \boldsymbol{a}} \cdot (\boldsymbol{x})^{\star \boldsymbol{b}}$.
5. $(\boldsymbol{x})^{\star(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})} = (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}})^{\star \boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}})^{\star \boldsymbol{a}}$.
6. $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})^{\star \boldsymbol{a}} = \boldsymbol{x}^{\star \boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{y}^{\star \boldsymbol{a}}$.
7. $\log_a \boldsymbol{x}^{\star \boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b} * \log_a \boldsymbol{x}$.
8. $\boldsymbol{x}^{\star \log_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b}_\odot$.

Доказательство. 1. Очевидно.

2. По предложениям 4(6), 6(3), 5(4):
$(a\mathbf{x})^{\star \mathbf{b}} = \left((a\mathbf{x})^{\mathbf{b}}\right)_\odot = \left(a^{\mathbf{b}} \mathbf{x}^{\mathbf{b}}\right)_\odot = \left(a^{\mathbf{b}}\right)_\odot \left(\mathbf{x}^{\mathbf{b}}\right)_\odot = a^{\mathbf{b}_\oplus} \mathbf{x}^{\star \mathbf{b}}$.

3. $\mathbf{x}^{\star(a\mathbf{b})} = x_1^{ab_1} \cdot x_2^{ab_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{ab_n} = (x_1^a)^{b_1} \cdot (x_2^a)^{b_2} \cdot \ldots \cdot (x_n^a)^{b_n} = (\mathbf{x}^a)^{\star \mathbf{b}}$.
$\mathbf{x}^{\star(a\mathbf{b})} = x_1^{ab_1} \cdot x_2^{ab_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{ab_n} = \left(x_1^{b_1}\right)^a \cdot \left(x_2^{b_2}\right)^a \cdot \ldots \cdot \left(x_n^{b_n}\right)^a = \left(x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{b_n}\right)^a = \left(\mathbf{x}^{\star \mathbf{b}}\right)^a$.

4. $(\mathbf{x})^{\star(\mathbf{a}+\mathbf{b})} = (\mathbf{x}^{\mathbf{a}+\mathbf{b}})_\odot = (\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{b}})_\odot = (\mathbf{x}^{\mathbf{a}})_\odot \cdot (\mathbf{x}^{\mathbf{b}})_\odot = (\mathbf{x})^{\star \mathbf{a}} \cdot (\mathbf{x})^{\star \mathbf{b}}$.
Использовали предложение 4(7) и 6(3).

5. $(\mathbf{x})^{\star(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})} = x_1^{a_1 b_1} \cdot x_2^{a_2 b_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n b_n} = (x_1^{a_1})^{b_1} \cdot (x_2^{a_2})^{b_2} \cdot \ldots \cdot (x_n^{a_n})^{b_n} = (\mathbf{x}^{\mathbf{a}})^{\star \mathbf{b}}$.
По предложению 2(3):
$(\mathbf{x})^{\star(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})} = (\mathbf{x})^{\star(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})} = (\mathbf{x}^{\mathbf{b}})^{\star \mathbf{a}}$.

6. По предложениям 4(8) и 6(3):
$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^{\star \mathbf{a}} = ((\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^{\mathbf{a}})_\odot = (\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{y}^{\mathbf{a}})_\odot = (\mathbf{x}^{\mathbf{a}})_\odot \cdot (\mathbf{y}^{\mathbf{a}})_\odot = \mathbf{x}^{\star \mathbf{a}} \cdot \mathbf{y}^{\star \mathbf{a}}$.

7. $\log_a \mathbf{x}^{\star \mathbf{b}} = \log_a (x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{b_n}) = b_1 \log_a x_1 + b_2 \log_a x_2 + \ldots + b_n \log_a x_n = \mathbf{b} * \log_a \mathbf{x}$.

8. $\mathbf{x}^{\star \log_{\mathbf{x}} \mathbf{b}} = x_1^{\log_{x_1} b_1} \cdot x_2^{\log_{x_2} b_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\log_{x_n} b_n} = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n = \mathbf{b}_\odot$. □

4. Заключение

Полученные свойства призваны формализовать решение функциональных уравнений от функций многих переменных, чем автор уже и воспользовался. Рассмотренные выше операции "астра" $*$ и "стар" $\star$ не плод фривольной фантазии автора. Они возникли, как отмечено во введении, при изучении уравнений Йенсена и Коши четырёх типов:

$$\mathbf{J}. \qquad f\left(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}\right) = \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y}),$$

$$\mathbf{K}_I. \qquad f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}),$$

$$\mathbf{K}_{II}. \qquad f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}),$$

$$\mathbf{K}_{III}. \qquad f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}),$$

$$\mathbf{K}_{IV}. \qquad f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}),$$

решения которых в классе непрерывных функций имеют соответственно вид [1]:

$$\mathbf{b} * \mathbf{x} + b_0, \quad \mathbf{b} * \mathbf{x}, \quad a^{\mathbf{b} * \mathbf{x}}, \quad \mathbf{b} * log_a \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}^{\star \mathbf{b}}.$$

Выделение повторяющейся конструкции и натолкнуло нас на мысль ввести новые функции. Возможно, они найдут применение и в других разделах математики.

Список литературы

1. Поликанова И.В. Функциональные уравнения от функций многих переменных // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. — 2023. — № 9. — С. 30–45.

2. Ацель Я. Некоторые общие методы в теории функциональных уравнений одной переменной. Новые применения функциональных уравнений // УМН. — 1956. — Т. 11, № 3(69). — С. 3–68.

3. Omarova B.Zh., Sartabanov Zh.A. On multiperiodic solutions of perturbed nonlinear autonomous systems with the differentiation operator on a vector field // Eurasian Math. J. — 2021. — Vol. 12, no. 1. — P. 68–81. — https://doi.org/10.32523/2077-9879-2021-12-1-68-81.