УДК 512.552.4

О стандартном тождестве в n-мерных нильпотентных алгебрах с условием $dimR^2/R^3 = dimR^3/R^4 = 3$

Петров Е.П.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
pep@mail.asu.ru

Аннотация

В статье показано, что всякая 2-порожденная n-мерная нильпотентная алгебра R над алгебраически замкнутым полем с условием $dimR^2/R^3 = dimR^3/R^4 = 3$ удовлетворяет стандартному тождеству степени $k = \left[\dfrac{1+\sqrt{1+8n}}{2}\right]$.

Ключевые слова: Нильпотентная алгебра, определяющее соотношение, тождество.

В 80-е годы в Днестровской тетради [1] Л.А. Бокутем была предложена задача (№ 1.23) об описании тождеств, выполняющихся во всех n-мерных ассоциативных алгебрах над полем (n – фиксированное число). С.А. Пихтильковым в работе [2] эта задача была решена для алгебр с единицей при $n < 18$. Ю.Н. Мальцевым в статье [3] изучалось многообразие алгебр, порожденное всеми n-мерными нильпотентными алгебрами. Такие многообразия там были описаны для $n \leq 6$. И.Л. Гусевой в статье [4] было доказано, что n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству степени $\left[\dfrac{n}{3}\right] + 2$. В 1991 г. автором в работе [5] была сформулирована гипотеза о том, что:

произвольная n-мерная нильпотентная алгебра над полем удовлетворяет стандартному тождеству $S_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum\limits_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(k)} = 0$ степени $k = \left[\dfrac{1+\sqrt{1+8n}}{2}\right]$.

В качестве подтверждения этой гипотезы в [5] был приведен пример n-мерной алгебры, удовлетворяющей стандартному тождеству указанной степени, но не удовлетворяющей никакому полилинейному тождеству меньшей степени, и доказано, что n-мерная нильпотентная алгебра R с условием $dimR^2/R^3 = 2$ удовлетворяет данной гипотезе. С целью дальнейшего подтверждения данной гипотезы автором в работах [6–9] проведены исследования нильпотентной конечномерной алгебры R, удовлетворяющей для некоторого натурального числа $N > 1$ условию: $dimR^N/R^{N+1} = 2$, с описанием ее строения, определяющих соотношений и тождеств. Доказано, что такая алгебра удовлетворяет стандартному тождеству степени $N + 2$. В частности, когда $dimR^2/R^3 = 2$, в алгебре выполняется стандартное тождество степени 4.

Из полученных автором результатов ясно, что степень тождества в алгебре R с условием $dimR^N/R^{N+1} = 2$, $N > 1$, не зависит от величины индекса нильпотентности алгебры R. В случае, когда $dimR^2/R^3 = 3$, такой независимости уже нет. В [10] автором замечено, что для любого натурального числа t найдется 2-порожденная нильпотентная алгебра R над алгебраически замкнутым полем с одним единственным определяющим соотношением и с условием $dimR^2/R^3 = 3$, не удовлетворяющая никакому полилинейному тождеству степени t. Тем не менее, имеет место следующий факт.

Теорема 1. *Пусть R – n-мерная нильпотентная алгебра над произвольным полем с одним единственным определяющим соотношением. Тогда алгебра R удовлетворяет стандартному тождеству $S_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0$ степени* $k = \left[\dfrac{1+\sqrt{1+8n}}{2}\right]$.

Таким образом, такая алгебра удовлетворяет вышеуказанной гипотезе. Сложнее обстоит дело, когда в алгебре более одного определяющего соотношения.

В [11, 12] автором анонсировано строение 2-порожденной нильпотентной алгебры R над алгебраически замкнутым полем с условием $dimR^2/R^3 = dimR^3/R^4 = 3$. Приведем полученные там результаты.

Предложение 1. *Пусть R – 2-порожденная нильпотентная алгебра над алгебраически замкнутым полем F с условием $dimR^2/R^3 = dimR^3/R^4 = 3$ с двумя определяющими соотношениями. Тогда R изоморфна (антиизоморфна) одной из следующих алгебр:*

(1) базис-таблица:

a	a^2	a^3	a^4	a^5	$\ldots$
b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	$\ldots$
	b^2	ab^2	a^2b^2	a^3b^2	$\ldots$

определяющие соотношения: $ba \equiv \beta ab \pmod{R^3}$ *(либо* $ba \equiv a^2 + ab \pmod{R^3}$*),* $b^3 \equiv \alpha a^3 + \gamma a^2 b + \delta ab^2 \pmod{R^4}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$*;*

(2) базис-таблица:

a	a^2	a^3	a^4	a^5	$\ldots$
b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	$\ldots$
	b^2	b^3	b^4	b^5	$\ldots$

определяющие соотношения: $ba \equiv \beta ab \pmod{R^3}$ *(либо* $ba \equiv a^2 + ab \pmod{R^3}$*),* $ab^2 \equiv \gamma a^2 b \pmod{R^4}$, $\beta, \gamma \in F$*;*

Предложение 2. *Пусть R – 2-порожденная нильпотентная индекса N алгебра над алгебраически замкнутым полем F с условием $dimR^2/R^3 = dimR^3/R^4 = 3$ с тремя определяющими соотношениями. Тогда R изоморфна (антиизоморфна) одной из следующих алгебр:*

(1) базис-таблица:

a	a^2	a^3	a^4	a^5	$\ldots$
b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	$\ldots$
	ab	aba	a^2ba	a^3ba	$\ldots$

определяющие соотношения: $b^2 \equiv 0 \pmod{R^3}$, $ba^2 \equiv \alpha_1 a^3 + \beta_1 a^2 b + \gamma_1 aba \pmod{R^4}$, $bab \equiv \alpha_2 a^3 + \beta_2 a^2 b + \gamma_2 aba \pmod{R^4}$, $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in F$*;*

(2) базис-таблица:

a	a^2	a^3	a^4	a^5	$\ldots$
b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	$\ldots$
	ba	ba^2	ba^3	ba^4	$\ldots$
			ba^2b	ba^3b	$\ldots$

определяющие соотношения: $b^2 \equiv 0 \pmod{R^3}$, $aba \equiv 0 \pmod{R^4}$, $bab \equiv 0 \pmod{R^4}$ *при* $N > 4$, $bab \equiv \alpha a^3 + \beta a^2 b + \gamma ba^2 \pmod{R^4}$ *при* $N = 4$, $\alpha, \beta, \gamma \in F$*;*

(3) базис-таблица:

a	a^2	a^3	a^4	a^5	$\ldots$
b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	$\ldots$
	ba	bab			

определяющие соотношения: $b^2 \equiv 0 \pmod{R^3}$, *либо* $aba \equiv 0 \pmod{R^4}$, $ba^2 \equiv \alpha a^3 + \beta a^2 b \pmod{R^4}$ *либо* $aba \equiv \gamma a^3 \pmod{R^4}$, $ba^2 \equiv \delta a^3 \pmod{R^4}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$*;*

(4) базис-таблица:

a	a^2	a^2b	ba^2b
b	ab	ba^2	
	ba	bab	

определяющие соотношения: $b^2 \equiv 0 \pmod{R^3}$, $a^3 \equiv aba \equiv 0 \pmod{R^4}$.

Заметим, что алгебры (3) и (4) из предложения 2 удовлетворяют стандартному тождеству степени 4, что следует из результатов работы [9] и это тождество минимально.

Выясняется, что и остальные алгебры из предложений 1, 2 удовлетворяют вышеуказанной гипотезе. Именно, имеет место следующий факт [13].

Теорема 2. *Пусть R – n-мерная 2-порожденная нильпотентная алгебра над алгебраически замкнутым полем F с условием $dimR^2/R^3 = dimR^3/R^4 = 3$ с двумя или тремя определяющими соотношениями. Тогда алгебра R удовлетворяет стандартному тождеству $S_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0$ степени $k = \left[\dfrac{1+\sqrt{1+8n}}{2}\right]$.*

Оказывается, что ограничение на количество определяющих соотношений можно убрать. Поэтому, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть R – n-мерная 2-порожденная нильпотентная алгебра над алгебраически замкнутым полем F с условием $dimR^2/R^3 = dimR^3/R^4 = 3$. Тогда алгебра R удовлетворяет стандартному тождеству $S_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0$ степени $k = \left[\dfrac{1+\sqrt{1+8n}}{2}\right]$.*

Список литературы

1. Днестровская тетрадь: нерешенные проблемы теории колец и модулей: (оперативно-информационный материал). — 1982.

2. Пихтильков С.А. О многообразиях, порожденных n-мерными алгебрами. — 1980. — Деп. в ВИНИТИ, № 1213-80.

3. Мальцев Ю.Н. О тождествах нильпотентных алгебр // Известия вузов, Мат. — 1986. — № 9.

4. Гусева И.Л. О тождествах конечномерных нильпотентных алгебр // Международная конференция по алгебре памяти А.И. Мальцева: сборник трудов. — Новосибирск, 1989.

5. Петров Е.П. О тождествах конечномерных нильпотентных алгебр // Алгебра и логика. — 1991. — № 5.

6. Петров Е.П. Определяющие соотношения и тождества нильпотентной конечномерной алгебры R с условием $dimR^2/R^3 = 2$ // Сибирские электронные математические известия. — 2016. — № 13.

7. Петров Е.П. Строение, определяющие соотношения и тождества конечномерной нильпотентной алгебры R с условием $dimR^N/R^{N+1} = 2$ // Сибирские электронные математические известия. — 2017. — № 14.

8. Петров Е.П. Определяющие соотношения и тождества конечнопорожденной нильпотентной алгебры R с условием $dimR^N/R^{N+1} = 2$ // Сибирские электронные математические известия. — 2018. — № 15.

9. Петров Е.П. О стандартном тождестве в конечнопорожденной нильпотентной алгебре R над произвольным полем с условием $dimR^N/R^{N+1} = 2$ // Сибирские электронные математические известия. — 2019. — № 16.

10. Петров Е.П. О строении, определяющих соотношениях и тождествах в 2-порожденной нильпотентной алгебре R с условием $dimR^N/R^{N+1} = 3$ // Международная конференция “Мальцевские чтения”, 19–23 августа 2019 г., тезисы докладов. — Новосибирск, 2019.

11. Петров Е.П. Об особенностях строения 2-порожденной нильпотентной алгебры R над полем с ограничениями на $dim R^3/R^4$ // Всероссийская конференция по математике с международным участием - МАК: “Математики – Алтайскому краю”, 28-29 июня 2021 г., сборник трудов. — Барнаул, 2021.

12. Петров Е.П. О строении конечномерных нильпотентных алгебр с условием $dim R^2/R^3 = dim R^3/R^4 = 3$ // Всероссийская конференция по математике с международным участием - МАК: “Математики – Алтайскому краю”, 7 июня 2023 г., сборник трудов. — Барнаул, 2023.

13. Петров Е.П. О стандартном тождестве в n-мерных нильпотентных алгебрах с двумя и тремя определяющими соотношениями и условием $dim R^2/R^3 = dim R^3/R^4 = 3$ // Всероссийская конференция по математике с международным участием - МАК: “Математики – Алтайскому краю”, 5 июня 2024 г., сборник трудов. — Барнаул, 2024.