УДК 372.851

О некоторых нестандартных приёмах решения экстремальных задач

Плотникова Е.А., Саженков А.Н., Саженкова Е.В.
Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
Новосибирский государственный университет экономики и управления, г. Новосибирск
pselena@gmail.com , sazhenkov_ an@mail.ru, sazhenkovs@yandex.ru

Аннотация

В работе представлен набор задач творческого характера для факультативного практикума со студентами младших курсов, решение которых направлено на развитие аналитических качеств и способствующих самостоятельному продвижению как в подготовке к студенческим математическим соревнованиям, так и в исследовательской работе.

Ключевые слова: Научно-исследовательская работа студентов младших курсов, экстремальные задачи, графы, индукция.

Регулярная факультативная работа по подготовке к тем или иным математическим соревнованиям, а также к научно-исследовательской работе даёт возможность выработки у учащихся логического и последовательного мышления. Геометрические рассуждения по определённым правилам позволяют последовательно объединять в себе несколько соображений-идей, а последовательное увеличение количества условий и требований к рассматриваемым объектам даёт возможность успешного продвижения в исследованиях к итоговому результату [1–5].

Представим здесь ряд задач для факультативного практикума по указанной в названии теме, призванных к подготовке к использованию представленных подходов в исследовательской работе над практическими задачами.

1. На столе лежат одинаковые (круги) монеты без наложений друг на друга. Какое минимальное количество цветов необходимо для раскраски монет так, что каждая монета была окрашена в один цвет, а касающиеся друг друга монеты были окрашены в разные цвета? [6, с. 29].

Ответ. 4 цвета.

Пусть имеется некоторое расположение монет на столе. Будем считать, что монеты единичного диаметра. Отметим центры монет на столе. Если монеты касаются друг друга, то соединим отрезком центры этих монет. Таким образом, произвольному расположению монет соответствует однозначно определённый граф, у которого попарные расстояния между вершинами не меньше 1 и вершины смежные тогда и только тогда, когда расстояние равно 1.

Обратно. Пусть на плоскости граф, у которого попарные расстояния между вершинами не меньше 1 и вершины смежные тогда и только тогда, когда расстояние равно 1. Тогда такому графу соответствует некоторое расположение монет на столе.

Итак. Задача сводится к правильной раскраске вершин графа с указанными выше свойствами.

На рисунке 1 приведён пример графа, для правильной раскраски вершин которого трёх цветов недостаточно. Во-первых, достаточно очевидно, что данный граф соответствует

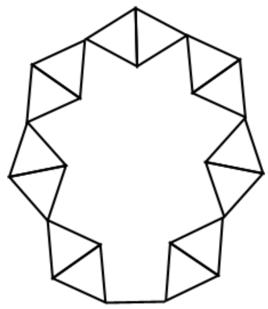

Рисунок 1. Пример графа

условию задачи (здесь все отрезки имеют единичную длину). Во-вторых, при правильной раскраске этого графа в три цвета необходимо вершины, не соединённые диагональю, у каждого ромба должны быть одноцветными. Получаем противоречие на отрезке внизу рисунка. Следовательно, для правильной раскраски этого графа необходимо не менее четырёх цветов.

Оценка. Покажем, что для правильной раскраски любого графа, соответствует условию задачи, достаточно четырёх цветов.

Индукция по числу вершин. База индукции очевидна.

Предположим, что любой граф, имеющий n вершин и удовлетворяющий условию задачи, можно окрасить в четыре цвета.

Рассмотрим граф, имеющий $n+1$ вершину удовлетворяющий условию задачи. Построим выпуклую оболочку вершин этого графа. Вершина выпуклого многоугольника является вершиной исходного графа, при этом её степень не больше 3. Удалим эту вершину графа (вместе с рёбрами). Останется граф, имеющий n вершин и удовлетворяющий условию задачи, который по предположению можно окрасить в четыре цвета. Возвращаем удалённую ранее вершину. Поскольку её степень не выше 3, то её можно покрасить в цвет, отличный от смежных с нею вершин.

2. Шестиугольник M_0 разрезан на выпуклые многоугольники $M_1, M_2, \ldots, M_n$, число сторон которых равно $m_1, m_2, \ldots, m_n$ соответственно. Докажите неравенство: $\frac{m_1+m_2+\ldots+m_n}{n} \leq 6$.

Рассмотрим граф, вершинами которого будут вершины многоугольников $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$. Две вершины называем смежными, если они – соседние вершины многоугольников $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

Обозначим: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 – вершины многоугольника M_0; $a_7, \ldots, a_k$ – остальные вершины; $m\,(a_i)$ – количество сторон многоугольников M_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, у которых a_i является вершиной одной из его сторон (концом его стороны).

Тогда 1) $m\,(a_1) + \ldots + m\,(a_k) = 2\,(m_1 + \ldots + m_k)$;

2) $m\,(a_i) = 2\,deg\,a_i - 2$, где $i = 1, 2, \ldots, 6$, deg – степень вершины;

3) если вершина a_i лежит внутри одной из сторон многоугольников $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$, то $m\,(a_i) = 2\,deg\,a_i - 2 \leq 2\,deg\,a_i$. (при этом таких сторон – ровно одна);

4) если вершина a_i не лежит внутри ни одной из сторон многоугольников $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$, то $m\,(a_i) = 2\,deg\,a_i$.

Таким образом, получаем:

$$m\,(a_1) + \ldots + m\,(a_k) = (2\,deg\,a_1 - 2) + \ldots + (2\,deg\,a_6 - 2) + m\,(a_7) + \ldots + m\,(a_k) \leq$$
$$\leq 2\,(deg\,a_1 + \ldots + deg\,a_k) - 12 = 4P - 12,$$

здесь P – количество рёбер графа. Итого $m_1 + \ldots + m_k \leq 2P - 6$.

Далее, $deg\,a_i \geq 2$, если $i = 1, 2, \ldots, 6$ и $deg\,a_i \geq 3$, если $i = 7, \ldots, k$. Значит, $2P \geq 12 + 3\,(B - 6) = 3B - 6$, здесь B – количество вершин графа. Кроме того, количество граней есть $\tilde{A} = n + 1$. Теперь применяем теорему Эйлера для планарных графов

$$P = B + \tilde{A} - 2 \leq \frac{2P + 6}{3} + n + 1 - 2 = \frac{2P}{3} + n + 1$$

и получаем: $\frac{P}{3} \leq n + 1$, $2P \leq 6n + 6$. Итого $m_1 + \ldots + m_k \leq 2P - 6 \leq 6n$.

3. На столе лежат карточки с номерами $1, 2, \ldots, n$. На невидимой стороне каждой карточки написано по одному числу. Разрешается выбрать любую группу карточек (в том числе одну карточку) и узнать сумму чисел на выбранных карточках.

За какое минимальное количество вопросов можно узнать на какой карточке написано какое число?

Ответ: за n вопросов.

Решение. Если задавать вопросы по каждой карточке в отдельности, то за n вопросов получим требуемый ответ.

Предположим, что задано k вопросов, где $k < n$, и получены ответы $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Сопоставим ответу S_i $(1 \leq i \leq k)$ упорядоченный набор $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, где $a_{ij} = 1$, если j-тая карточка попала в группу i-того вопроса и $a_{ij} = 0$, если не попала. Отметим, что система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = S_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = S_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = S_k \end{cases} \tag{1}$$

имеет, по крайней мере, одно решение, соответствующее числам, написанным на обороте карточек. Пусть это $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Из системы (1) составим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Очевидно, что $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ решение этой системы.

Докажем индукцией по n, что система (2) имеет и ненулевые решения. Для $n = 2$ система (2) состоит из одного уравнения $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0$, пусть $a_{11} \neq 0$, тогда $(-a_{12}, a_{11})$ ненулевое решение. В индукционном шаге выражаем переменную, при которой ненулевой коэффициент через остальные в одном из уравнений и подставляем в остальные уравнения. Итак, пусть $(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ ненулевое решение системы (2). Тогда $(x_1^0 + x_1^1, x_2^0 + x_2^1, \ldots, x_n^0 + x_n^1)$ решение системы (1), отличное от $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Это означает, что на обороте карточек могут быть написаны два разных набора чисел, по которым получены одинаковые ответы.

4. На конференции четыре официальных языка. Любые два участника могут общаться между собой на одном из них. Докажите, что одним из языков владеет не менее $\frac{3}{5}$ участников.

Задачу достаточно решить для случая, когда каждый участник владеет не менее, чем двумя языками. Действительно, если один из участников владеет только одним языком, тогда этим языки владеют все участники и задача решена.

Считаем далее, что каждый из участников владеет не менее чем двумя языками. Отметим, что в этом случае тот, кто знает три языка, может общаться с каждым из участников конференции. Поэтому, если кто-либо говорит на четырёх языках, то он может отказаться владеть одним из языков. Таким образом, можно считать, что каждый из участников владеет не более, чем тремя языками.

Допустим теперь, что есть участник конференции, говорящий на трех языках, при этом он в общении с остальными участниками конференции может обойтись двумя языками. В этом случае будем считать, что он владеет двумя языками. Будем повторять эту процедуру с другими трехъязычными участниками конференции до тех пор, пока либо их не останется, либо не окажется, что трехъязычные участники конференции не могут обойтись двумя языками.

Рассмотрим случай, когда каждый из участников владеет ровно двумя языками. Пусть 1, 2, 3, 4 – языки конференции. Допустим, что один из официальных языков не знает никто. Пусть это язык 4, тогда имеется три группы участников конференции, которые владеют языками 1 и 2 (n человек), 2 и 3 (m человек), 1 и 3 (k человек). Всего участников конференции $N = n + m + k$, язык 1 знают $n + k$ человек, язык 2 знают $n + m$ человек, язык 3 знают $m + k$ человек. Если при этом каждым языком менее $\frac{2}{3}N$, то, складывая неравенства $n + k < \frac{2}{3}N$, $n + m < \frac{2}{3}N$, $k + m < \frac{2}{3}N$, получим противоречие $2N < 2N$ $\left(\frac{2}{3} > \frac{3}{5}\right)$ и задача в рассматриваемом случае решена. Если же в общении используются все четыре языка, то один из языков должны знать все. Действительно, пусть участник A владеет языками 1 и 2, участник B владеет языком 3, тогда его второй язык 1 или 2. Можно считать, что это 1. Допустим, что участник C, владеет языком 4, тогда второй его язык это 1 и все знают язык 1.

Рассмотрим случай, когда в результате описанной выше процедуры остался трехъязычный участник A. Пусть он владеет языками 1, 2, 3. Если предположить, что среди участников конференции есть тот, кто владеет только языками 1 и 2, то, поскольку он может общаться со всеми участниками конференции, участник A тоже может обойтись языками 1 и 2. Но поскольку он остался в результате описанной выше процедуры, предположение не верно. Значит, каждый из участников, который владеет ровно двумя языками, относится к одной из трёх групп владеющих языками 1 и 4 (n человек), 2 и 4 (m человек), 3 и 4 (k человек). Из доказанного выше вытекает, что все оставшиеся трехъязычные участники владеют языками 1, 2, 3 (l человек). Всего участников конференции $N = n+m+k+l$, язык 1 знают $n+l$ человек, язык 2 знают $m+l$ человек, язык 3 знают $k+l$ человек, язык 4 знают $n+m+k$ человек. Если при этом каждым языком менее $\frac{3}{5}$ участников то, $n+l < \frac{3}{5}N$, $m+l < \frac{3}{5}N$, $k+l < \frac{3}{5}N$, $n+m+k < \frac{3}{5}N$. Сложим эти неравенства, умножив последнее из них на 2, получим противоречие $3N < 3N$.

Список литературы

1. Саженков А.Н., Саженкова Т.В. О некоторых аспектах подготовки к студенческим математическим соревнованиям // МАК: “Математики - Алтайскому краю”: сборник трудов всероссийской конференции по математике. — Барнаул : Изд-во Алтайского госуниверситета, 2010.

2. Саженков А.Н., Саженкова Т.В. Дополнительное математическое образование как средство развития творческого потенциала студентов и школьников // Сборник научных статей международной школы-семинара “Ломоносовские чтения на Алтае”. — Барнаул : Изд-во Алтайского госуниверситета, 2011.

3. Саженков А.Н. Геометрия и анализ в задачах математических олимпиад // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. — Барнаул : Изд-во Алтайского госуниверситета, 2013.

4. Плотникова Е.А., Саженков А.Н., Саженкова Т.В. Геометрический факультатив-практикум в научно-исследовательской работе старшеклассников и студентов младших

курсов // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. — 2017. — № 3.

5. Плотникова Е.А., Саженкова Е.В. О прикладных аспектах преподавания математического анализа на инженерных и экономических направлениях // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. — 2021. — № 7.

6. Рингель Г. Теорема о раскраске карт. — М. : Мир, 1977.