

О диаграмме Бляшке на примере множества правильных пирамид

Оглезнев Д.И., Пономарев И.В.

Алтайский государственный университет, г. Барнаул
ogleznev_96@mail.ru, igorpon@mail.ru

Аннотация

Статья посвящена исследованию характеристик множеств правильных усеченных пирамид. С учетом изопериметрических неравенств, связывающих характеристики выпуклых тел, построены диаграммы Бляшке для множеств правильных пирамид.

Ключевые слова: Диаграмма Бляшке, изопериметрические неравенства, выпуклый анализ, усеченные пирамиды.

1. Введение

Пусть K – пространство компактных выпуклых тел, принадлежащих трехмерному пространству, а k – некоторое выпуклое тело, принадлежащее K . Обозначим через $V(k) = V$, $S(k) = S$, $M(k) = K$ – объем, площадь поверхности и интеграл средней кривизны тела k соответственно. Вильгельм Бляшке предложил каждому $k \in K$ сопоставить на плоскости точку (x, y) [1], где координаты точки определил следующим образом

$$x = \frac{4\pi S}{M^2}, \quad y = \frac{48\pi^2 V}{M^3}.$$

В работах [2,3] определены неравенства, описывающие связь между инвариантами V , S и M . С учетом этих неравенств можно утверждать, что область, занимаемая диаграммой Бляшке, является ограниченным множеством. Часть границы этого множества четко определена, но неравенства, которые замыкают границу, остаются неизвестными.

2. Изучение множества правильных пирамид

Рассмотрим множество правильных пирамид P со стороной основания a и высотой H . Для вычисления указанных выше инвариантов воспользуемся известными формулами:

$$V(P) = \frac{na^2 H}{12 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}},$$

$$S(P) = \frac{na^2}{4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} + an \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} \right)^2},$$

$$M(P) = \frac{1}{2} \sum_i (\pi - \alpha_i) a_i,$$

где n – количество вершин основания; a_i – длина i -го ребра; α_i – двугранный угол при ребре a_i .

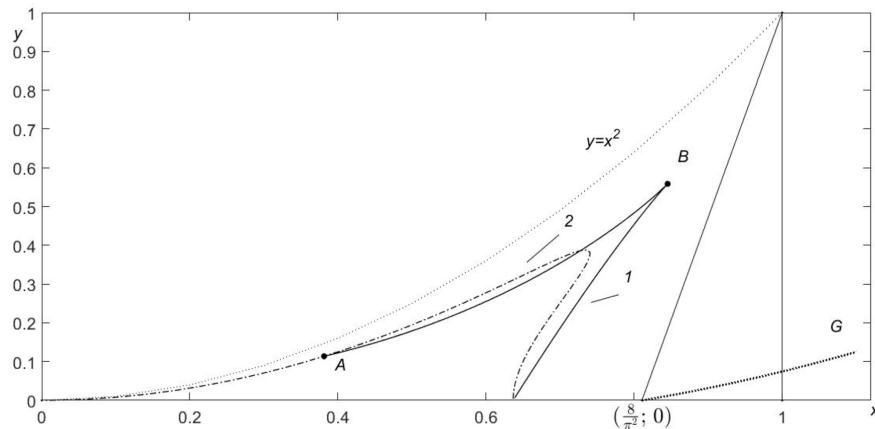


Рисунок 1. Диаграмма Бляшке множества четырехугольных пирамид

Нетрудно вывести формулы для вычисления характеристик множества правильных усеченных пирамид P_h , где h – длина отрезка, отсекаемого от высоты исходной пирамиды.

Для построения диаграммы Бляшке была разработан программный комплекс в пакете MatLab. Результаты моделирования представлены на рисунке 1.

3. Выводы

В результате работы программы получили численные результаты границ диаграммы Бляшке для множеств P и P_h . На рисунке 1 сплошной линии 1 соответствуют образы усеченных пирамид длины основания $a = 3$, которые получаются вследствие отсечения некоторого значения h от высоты правильной четырехугольной пирамиды, образ которой представлен в виде точки A на штрихпунктирной линии 2. Точка B на диаграмме Бляшке соответствует правильная четырехугольная усеченная пирамида с высотой 12,2392.

Список литературы

1. Blaschke W. Eine Frage über konvexe Körper, Jahresber // Deutsch, Math-Verein. — 1916. — Vol. 25. — P. 121–125.
2. Бутовский М.М. Расчет интегралов поперечных мер Минковского, сумм Минковского и построение диаграммы Бляшке для выпуклых многогранников в Евклидовом пространстве // Конструирование и оптимизация параллельных программ. — Новосибирск, 2009. — С. 21–32.
3. Васин Д.В. Диаграмма Бляшке множества выпуклых тел // Вестник БГПУ: Естественные и точные науки. — 2002. — № 2. — С. 5–9.