УДК 512.552.4

О стандартном тождестве в 2-алгебрах и в 3-алгебрах

Петров Е.П.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
pep@mail.asu.ru

Аннотация

В статье показано, что всякая n-мерная 3-алгебра над произвольным полем, $n < 78$, удовлетворяет стандартному тождеству $S_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0$ удовлетворяет стандартному тождеству степени $k = \left[\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}\right]$.

Ключевые слова: Нильпотентная алгебра, многообразие, тождество

В 80-е годы в Днестровской тетради [1] Л.А. Бокутем была предложена задача (№ 1.23) об описании тождеств, выполняющихся во всех n-мерных ассоциативных алгебрах над полем (n – фиксированное число).

Многими авторами в те годы изучался этот вопрос (Пихтильков С.А. [2], Мальцев Ю.Н. [3], Гусева И.Л. [4], Петров Е.П. [5]) и, в частности, Мальцевым Ю.Н. [3] был поставлен вопрос:

(*) *Какова степень минимального тождества в многообразии, порожденным всеми n-мерными нильпотентными алгебрами?*

В 1991 г. автором [5] была сформулирована гипотеза:

(**) *Произвольная n-мерная нильпотентная алгебра над полем удовлетворяет стандартному тождеству $S_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum(-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots, x_{\sigma(k)} = 0$ степени $k = \left[\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}\right]$.*

Выяснилось, что эта гипотеза справедлива для алгебр малой размерности (менее 17) и в качестве подтверждения этой гипотезы был приведен пример n-мерной алгебры, удовлетворяющей стандартному тождеству указанной степени, но не удовлетворяющей никакому полилинейному тождеству меньшей степени. Также было доказано, что произвольная n-мерная нильпотентная алгебра R с условием $dim R^2/R^3 \leq 2$ удовлетворяет данной гипотезе. В последующих работах автора [6, 7] продолжились исследования с целью нахождения степени минимального тождества в многообразии, порожденным всеми n-мерными нильпотентными алгебрами.

Обратимся теперь к классу так называемых 2-алгебр, введенных Ю.М. Рябухиным и Р.С. Флоря в [8]. Под 2-алгеброй понимается локально нильпотентная алгебра, порожденная такими элементами x, что квадрат соответствующего главного идеала (x) равен нулю. Примерами таких алгебр являются хорошо известные алгебра Грассмана и алгебра верхне-треугольных матриц с нулями на главной диагонали.

Если рассматривать отдельно n-мерные 2-алгебры (n – фиксировано), то имеет место следующий факт [9]:

Теорема 1. *Пусть M – многообразие, порожденное всеми n-мерными 2-алгебрами. Тогда идеал тождеств $T(M) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}^T$, где $k = \left[\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}\right]$.*

Напомним, что T-идеалом называют такой двусторонний идеал I свободной ассоциативной алгебры $F < X >$, для которого для любого эндоморфизма ϕ алгебры $F < X >$

образ $\phi(I)$ лежит в I. Для многообразия $M = var < f_i = 0 > T$-идеал, порожденный многочленами $f_i = 0$, принято обозначать $T(M) = \{f_i = 0\}^T$ и называть идеалом тождеств многообразия M ([10, 11]).

Таким образом, из теоремы 1 следует, что вышеуказанная гипотеза остается верной и для класса 2-алгебр.

Рассмотрим далее по аналогии с 2-алгебрами более широкий класс 3-алгебр, включающий в себя 2-алгебры, то есть класс локально нильпотентных алгебр, порожденных такими элементами x, что третья степень соответствующего главного идеала (x) равна нулю. Обнаружилось, что для малых размерностей 3-алгебр (менее 55) вышеуказанная гипотеза остается также верной [12]. На данный момент имеет место следующий факт:

Теорема 2. *Пусть R – n-мерная 3-алгебра над произвольным полем, $n < 78$. Тогда алгебра R удовлетворяет стандартному тождеству $S_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0$ степени $k = \left[\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}\right]$. Причем эта оценка является точной.*

Список литературы

1. Днестровская тетрадь: нерешенные проблемы теории колец и модулей: (оперативно-информационный материал). — 1982.

2. Пихтильков С.А. О многообразиях, порожденных n-мерными алгебрами. — 1980. — Деп. в ВИНИТИ, № 1213-80.

3. Мальцев Ю.Н. О тождествах нильпотентных алгебр // Известия вузов, Мат. — 1986. — № 9.

4. Гусева И.Л. О тождествах конечномерных нильпотентных алгебр // Международная конференция по алгебре памяти А.И. Мальцева: сборник трудов. — Новосибирск, 1989.

5. Петров Е.П. О тождествах конечномерных нильпотентных алгебр // Алгебра и логика. — 1991. — № 5.

6. Петров Е.П. Определяющие соотношения и тождества нильпотентной конечномерной алгебры R с условием $dim R^2/R^3 = 2$ // Сибирские электронные математические известия. — 2016. — № 13.

7. Петров Е.П. О стандартном тождестве в конечнопорожденной нильпотентной алгебре R над произвольным полем с условием $dim R^N/R^{N+1} = 2$ // Сибирские электронные математические известия. — 2019. — № 16.

8. Рябухин Ю.М., Флоря Р.С. 2-алгебры и тождества в них // Мат. исслед. — 1984. — № 76.

9. Петров Е.П. Идеал тождеств многообразия, порожденного n-мерными 2-алгебрами // Известия вузов. Математика. — 2025. — № 2.

10. Rowen L. Polynomial identities in ring theory. — New York : Academic press, 1980.

11. Мальцев Ю.Н., Журавлев Е.В. Лекции по теории ассоциативных колец. — Барнаул : Изд-во АлтГУ, 2015.

12. Петров Е.П. О степени стандартного тождества в 2-алгебрах и 3-алгебрах // Международная конференция “Мальцевские чтения”, Тезисы докладов, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, 11–15 ноября 2024. — Новосибирск, 2024.