УДК 372.851

О непрерывных изменениях (малых шевелениях) в решении задач геометрии и анализа

Плотникова Е.А., Саженков А.Н., Саженкова Т.В.
Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
pselena@gmail.com, sazhenkov_ an@mail.ru, t.sazhenkova@gmail.com

Аннотация

В работе представлен набор задач с решениями для факультативного практикума по анализу и геометрии для старшеклассников и студентов младших курсов. Занятия на практикуме направлены на развитие аналитических способностей по применению функциональных и топологических понятий в решении задач исследовательского характера.

Ключевые слова: Малые сдвиги и шевеления фигур, выпуклые множества, покрытия множеств, многочлены

Факультативная работа по решению так называемых олимпиадных задач служит хорошей подготовкой к будущей научной деятельности, развивает аналитические способности учащихся. Геометрически образные рассуждения и применение понятия непрерывности движения дают возможность успешного продвижения в определённого вида исследованиях [1–3].

Далее представлен ряд задач для практикума по указанной в названии теме.

1. Можно ли квадрат со стороной 1 разрезать на две части и покрыть ими какой-нибудь круг диаметра больше 1?

Рассмотрим круг диаметра 1 и объединение двух описанных вокруг него квадратов, отличающихся поворотом на 45°. Получится восьмиконечная звезда. Откинем от неё четыре серых треугольника (рисунок 1 слева). Круг лежит в оставшейся белой фигуре и касается её границы только в четырёх точках. Немного сдвинем круг вправо. Сдвинутый круг останется в фигуре и будет касаться только её стороны CE в точке S. Это останется верным и после небольшого увеличения сдвинутого круга гомотетией с центром в S.

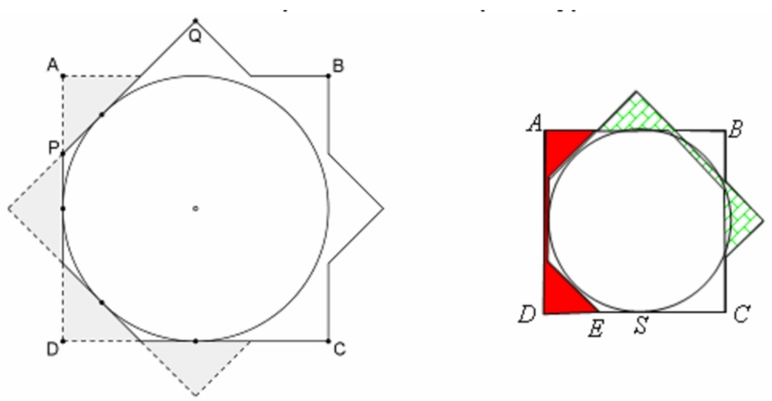

Рисунок 1. Чертеж к задаче 1

Поскольку увеличенный круг не касается AD, то два треугольника можно соединить перешейком вне круга (рисунок 1 справа). Отрежем от квадрата $ABCD$ полученную красную фигуру. Она покроет пару треугольников, в которых лежат непокрытые остатком квадрата части увеличенного круга.

2. В некоторой стране 2023 аэродромов. С каждого из них вылетел самолёт и приземлился на самом удалённом от места старта аэродроме. Могло ли случиться, что в результате все 2023 самолётов оказались на 50 аэродромах? (Землю можно считать плоской, а маршруты прямыми; попарные расстояния между аэродромами предполагаются различными)

Расположим сначала 50 аэродромов в вершинах правильного 50-угольника, а остальные аэродромы — в его центре. Тогда все самолёты из центра прилетят в вершины, а из вершин полетят в диаметрально противоположные вершины. Таким образом, все самолёты соберутся во всех 50 вершинах 50-угольника. Учитывая, что аэродромы не должны совпадать, а попарные расстояния между ними должны быть различными, немного пошевелим описанную конструкцию, добившись выполнения и этого условия.

3. На плоскости проведены n прямых так, что каждые две пересекаются, но никакие четыре через одну точку не проходят. Всего имеются 16 точек пересечения, причём через 6 из них проходят по три прямые. Найдите n.

"Пошевелим" данную конструкцию таким образом, чтобы по-прежнему каждые две прямые пересекались, но никакие три не проходили через одну точку. Тогда, если какие-то три прямые пересекались в некоторой точке O, то теперь вместо одной точки O появятся три точки попарного пересечения этих прямых. Значит, в результате "шевеления" исходное количество прямых не изменится, а количество точек пересечения увеличится на $2 \cdot 6 = 12$. В итоге, все прямые будут пересекаться попарно, а точек пересечения станет $16 + 12 = 28$. Таким образом, $n(n-1)/2 = 28$, откуда $n = 8$.

4. Из двух треугольных пирамид с общим основанием одна лежит внутри другой. Может ли быть сумма рёбер внутренней пирамиды больше суммы рёбер внешней?

Рассмотрим правильную треугольную пирамиду с основанием BCD и вершиной A. Пусть длина стороны основания a, а длина бокового ребра равна 1. Возьмём на стороне AD точку D' так, что $AD' = a$. Если a мало, то сумма длин рёбер пирамиды $ABCD$ близка к 3, а сумма длин рёбер пирамиды $ABCD'$ близка к 4.

5. Существует ли выпуклый многогранник, любое сечение которого плоскостью, не проходящей через вершину, является многоугольником с нечётным числом сторон?

Предположим, что такой многогранник существует. Тогда в каждой вершине многогранника должно сходиться нечётное число рёбер. Рассмотрим некоторую плоскость α, обладающую тем свойством, что любая параллельная ей плоскость содержит не более одной вершины многогранника. Будем рассматривать семейство сечений многогранника, параллельных этой плоскости. Перемещаем плоскость сечения параллельно. Число сторон сечения будет изменяться только при переходе через вершины, причём каждый раз проходится только одна вершина. Рассмотрим один такой переход через вершину, в которой сходится k ребер (k – нечетно). Если плоскость до перехода пересекала s из этих k ребер, то после перехода она будет пересекать $s - k$ ребер, поэтому при переходе число пересекаемых ребер изменилось на $s - 2k$ ($s - 2k$ – нечетно). Смена чётности.

6. Можно ли покрыть плоскость окружностями так, чтобы через каждую точку проходило ровно 2022 окружностей?

Разобьём плоскость прямыми $y = k$, где k – целые числа, на "полоски" и впишем в эти полоски всевозможные окружности диаметра 1. Легко видеть, что каждая точка плоскости принадлежит ровно двум окружностям. Теперь возьмём 1011 таких семейства окружностей, сдвинув их "немного" друг относительно друга по вертикали.

7. Большой прямоугольник разрезан на конечное число маленьких прямоугольников. (Стороны всех прямоугольников вертикальны или горизонтальны.) Известно, что у каждого маленького прямоугольника длина хотя бы одной стороны – целое число. Верно ли, что тогда и у большого прямоугольника хотя бы одна сторона имеет целую длину?

Введём декартову систему координат так, чтобы координаты сторон большого прямоугольника имели вид $(0,0)$, $(A,0)$, (A,B), $(0,B)$. Если утверждение задачи неверно, то A и B не целые. Разбиение большого прямоугольника на маленькие задаётся точками, являющимися вершинами маленьких прямоугольников. Будем шевелить их следующим образом: если x-координата точки нецелая, то увеличим её на s. То же с y-координатами. Целые координаты не меняем.

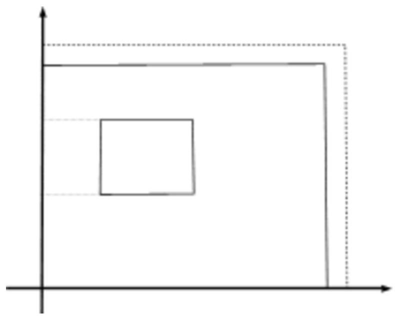

Рисунок 2. Чертеж к задаче 7

Выберем s_0 меньше длины любой стороны маленького прямоугольника, и пусть s такое, что $0 < s < s_0$, тогда каждый маленький прямоугольник сохранится. Поскольку стороны любого маленького прямоугольника двигаются одновременно со сторонами соседних прямоугольников (x или y координаты одинаковы), то маленькие прямоугольники после сдвигов образуют разбиение большого прямоугольника (не появляется "дырок").

Рассмотрим изменение площадей при сдвигах. Если у маленького прямоугольника сторона, например вертикальная, имеет целочисленную длину, то y – координаты вершин всех четырех вершин этого маленького прямоугольника или целые или одновременно не целые и, поэтому, вертикальная сторона сохраняет длину при любом шевелении прямоугольника не выше s_0. Пусть вертикальная сторона не имеет целочисленной длины. Тогда возможны два варианта 1) y – координаты вершин ровно одной из горизонтальных сторон не целые; 2) y – координаты обеих горизонтальных сторон не целые. В первом случае если это верхняя сторона, то длина вертикальной стороны увеличится на s, если у нижней стороны, то уменьшится на s. Во втором случае длина горизонтальной стороны сохранится.

Таким образом, изменение площади каждого маленького прямоугольника, как и суммы площадей, носит линейный характер $S(s) = as + b$. В свою очередь площадь "сдвинутого" большого прямоугольника $(A+s)(B+s) = AB + (A+B)s + s^2$ квадратично зависит от s. Противоречие.

8. Существует ли такой многочлен $P(x)$, что у него есть отрицательный коэффициент, а все коэффициенты любой его степени $(P(x))^n$, $n > 1$, положительны?

Достаточно найти такой многочлен, что коэффициенты его квадрата и куба положительны: любая другая степень представима в виде произведения квадратов и кубов. Назовём многочлен *положительным*, если все его коэффициенты положительны. Рассмотрим многочлен $f(x) = x^4 + x^3 + x + 1$. Легко видеть, что многочлены $f^2(x)$ и $f^3(x)$ положительны. Но сам многочлен $f(x)$ не является положительным: один из коэффициентов равен нулю. Чтобы получить многочлен с отрицательным коэффициентом, немного "пошевелим" многочлен $f(x)$, то есть рассмотрим многочлен $g(x) = f(x) - \varepsilon x^2$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Коэффициенты многочленов g^2 и g^3 близки к коэффициентам многочленов f^2 и f^3 и, значит, положительны (не согласные могут взять, например, $\varepsilon = 0,0001$ и проверить, что $g(x) = f(x) - \varepsilon x^2$ соответствующие многочлены положительны).

Замечание. Коэффициенты многочлена $f(x) = x^4 + x^3 + x + 1$ можно записать как число 11011, тогда коэффициенты f^2 и f^3 можно записать в виде последовательности цифр $11011^2 = 121242121$ и $11011^3 = 1334996994331$ (многочлены перемножаются "столбиком" так же, как многозначные числа).

Список литературы

1. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи / Под ред. В.О. Бугаенко. — 4-е, стереотип. изд. — М. : МЦНМО, 2008. — 96 с.

2. Саженков А.Н. Геометрия и анализ в задачах математических олимпиад // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. — Барнаул : Изд-во Алтайского госуниверситета, 2013.

3. Плотникова Е.А., Саженков А.Н., Саженкова Т.В. Геометрический факультатив-практикум в научно-исследовательской работе старшеклассников и студентов младших курсов // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. — 2017. — № 3. — С. 34–37.