

Численное моделирование нестационарных течений с испарением на основе обобщения решения Бириха

Гончарова Д.В., Ласковец Е.В.

*Алтайский государственный университет, г. Барнаул
darya.goncharova25@mail.ru, katerezanova@mail.ru*

Аннотация

Изучаются нестационарные конвективные течения в двухслойной системе испаряющейся жидкости и газопаровой смеси, заполняющей плоский канал и находящейся под действием продольного градиента температуры и поперечно направленного поля силы тяжести. Математическая модель основана на использовании приближения Обербека–Буссинеска уравнений Навье–Стокса при дополнительном учете взаимно обратных эффектов Соре и Дюфура в газопаровой фазе и на межфазной границе. Реализован численный алгоритм решения начально-краевой задачи с условиями со-пряжения на границе раздела для построения нестационарного аналога точного решения Бириха. Получены распределения температуры и профили продольной скорости. Изучено влияние величины продольного температурного градиента на структуру температурного поля и интенсивность течения.

Ключевые слова: Обобщение решения Бириха, бинарная смесь, конвекция, приближение Обербека–Буссинеска, численное моделирование, тепломассоперенос

1. Постановка задачи

Пусть двухслойная система испаряющейся жидкости и газопаровой смеси заполняет плоский канал и находится под действием продольного градиента температуры и поперечно направленного поля силы тяжести $\vec{g} = (0, -g)$ (см. рисунок 1). Конвективные течения в двухслойной системе изучаются на основе приближения Обербека–Буссинеска уравнений Навье–Стокса. Моделирование двухслойных течений с термокапиллярной границей раздела $y = 0$ с учетом фазового перехода на ней и взаимообратных эффектов термодиффузии в газопаровом слое проводится на основе нестационарного обобщения решения Остроумова–Бириха определяющих уравнений, см. [1–3], а также [4], [5]. Уравнения движения и тепломассопереноса в i -слое ($i = 1$ – жидкость, $i = 2$ – газ) имеют вид:

$$\begin{aligned} u_{i,t} + u_i u_{i,x} + v_i u_{i,y} &= -\frac{1}{\rho_{0i}} p_{i,x} + \nu_i (u_{i,xx} + u_{i,yy}), \\ v_{i,t} + u_i v_{i,x} + v_i v_{i,y} &= -\frac{1}{\rho_{0i}} p_{i,y} + \nu_i (v_{i,xx} + v_{i,yy}) + g (\beta_i^1 T_i + \delta_i^2 \beta^2 C_i), \\ T_{i,t} + u_i T_{i,x} + v_i T_{i,y} &= \chi_i (T_{i,xx} + T_{i,yy}) + \delta_i^2 \chi_i \alpha_r^C (C_{i,xx} + C_{i,yy}), \\ C_t + u_2 C_x + v_2 C_y &= D (C_{xx} + C_{yy}) + D \alpha_r^T (T_{2,xx} + T_{2,yy}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\vec{u}_i = (u_i, v_i)$ – вектор скорости $T_i(x, y, t)$ – температура, $C(x, y, t)$ – концентрация пара в газовой среде; p_i – модифицированное давление (отклонение давления жидкости (газа) P_i с учетом гидростатической компоненты и равновесных характеристик T_0, C_0 : $p_i = P_i - \wp_i \vec{g} \cdot \vec{x}$, $\wp_1 = \rho_{01}(1 + \beta_1^1 T_0)$, $\wp_2 = \rho_{02}(1 + \beta_2^1 T_0 + \beta^2 C_0)$); ν_i, χ_i, D – коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и диффузии соответственно; ρ_{0i} – некоторое значение

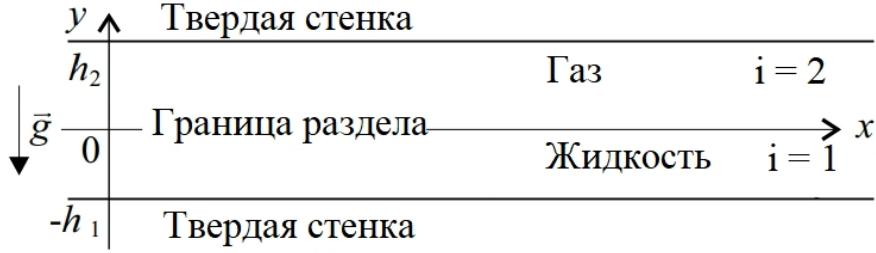


Рисунок 1. Схема области течения и система координат

плотности; β_i^1 и β^2 – коэффициенты теплового и концентрационного расширения; α_r^C и α_r^T – параметры диффузии теплопроводности (Дюфура) и термодиффузии (Соре), δ_i^2 – символ Кронекера.

На твердых непроницаемых стенах канала выполняются условия прилипания, задано линейное распределение температуры, и отсутствует поток легкой компоненты. На недеформируемой границе раздела выполняются кинематическое и динамическое условия, условия непрерывности скорости, температуры и потоков вещества, условия теплообмена и баланса массы, а также соотношение для концентрации насыщенного пара. В качестве замыкающего соотношения задается расход газа через поперечное сечение слоя.

Пусть в качестве характерных величин течения выбираются параметры h_1 – толщина слоя жидкости, $u_* = \nu_1/h_1$ – характерная скорость, $t_* = h_1/u_* = h_1^2/\nu_1$ – масштаб времени, T_* – характерный перепад температуры, $p_* = \rho_{01}u_*^2 = \rho_{01}\nu_1^2/h_1^2$ – характерное давление. Тогда безразмерные переменные (отмечены чертой сверху) определяются соотношениями

$$\bar{t} = \frac{t}{t_*}, \quad \bar{x} = \frac{x}{h_1}, \quad \bar{y} = \frac{y}{h_1}, \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{u_*}, \quad \bar{v}_i = \frac{v_i}{u_*}, \quad \bar{p}_i = \frac{p_i}{p_*}, \quad \bar{T}_i = \frac{T_i}{T_*}.$$

Будем искать решение определяющих уравнений в случае, когда поперечная компонента скорости равна нулю, а продольная u_i зависит от времени и поперечной координаты $\bar{u}_i = (u_i(y, t), 0)$. Система уравнений (1) в безразмерной форме перепишется в следующем виде (черту сверху опускаем):

$$\begin{aligned} u_{i,t} &= \nu_i u_{i,yy} - \frac{1}{\tilde{\rho}_i} p_{i,x}, \\ 0 &= -\frac{1}{\tilde{\rho}_i} p_{i,y} + Gr \tilde{\beta}_i T_i + \delta_i^2 Ga \beta^2 C, \\ T_{i,t} + u_i T_{i,x} &= \frac{1}{Pr} \tilde{\chi}_i (T_{i,xx} + T_{i,yy}) + \delta_i^2 \frac{1}{Pr} \tilde{\chi}_i \alpha^C (C_{xx} + C_{yy}), \\ C_t + u_2 C_x &= \frac{1}{Pe} (C_{xx} + C_{yy}) + \frac{1}{Pe} \alpha^T (T_{2,xx} + T_{2,yy}). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $Gr = \frac{g\beta_1^1 T_* h_*^3}{\nu_1^2}$ – число Грасгофа, $Ga = \frac{gh_*^3}{\nu_1^2}$ – число Галилея, $Pr = \frac{\nu_1}{\chi_1}$ – число

Прандтля, $Pe = \frac{h_1 u_*}{D}$ – диффузионное число Пекле, $\alpha^C = \frac{\alpha_r^C}{T_*}$, $\alpha^T = \alpha_r^T T_*$, $\tilde{\nu}_1 = 1$, $\tilde{\nu}_2 = \frac{\nu_1}{\nu_1}$

, $\tilde{\rho}_1 = 1$, $\tilde{\rho}_2 = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}}$, $\tilde{\chi}_1 = 1$, $\tilde{\chi}_2 = \frac{\chi_2}{\chi_1}$, $\tilde{\beta}_1 = 1$, $\tilde{\beta}_2 = \frac{\beta_2^1}{\beta_1^1}$. Отметим, что число Рейнольдса

$Re = \frac{h_1 u_*}{\nu_1}$ равно 1 в силу выбора характерной функции.

Представим в безразмерном виде граничные условия для функций скорости, температуры и концентрации. Условия прилипания на твердых стенах $y = -1$ и $y = h$, $h = h_2/h_1$

формулируются следующим образом:

$$u_1|_{y=-1} = 0, \quad u_2|_{y=h} = 0. \quad (3)$$

Распределение температуры линейно по продольной координате:

$$T_1|_{y=-1} = A_1(t)x + B_1(t), \quad T_2|_{y=h} = A_2(t)x + B_2(t). \quad (4)$$

Концентрация пара удовлетворяет условию нулевого потока пара на верхней границе $y = h$:

$$C_y + \alpha^T T_{2,y}|_{y=h} = 0. \quad (5)$$

На термокапиллярной границе раздела $y = 0$ постулируется условия непрерывности продольных скоростей и температуры:

$$u_1|_{y=0} = u_2|_{y=0}, \quad T_1|_{y=0} = T_2|_{y=0}. \quad (6)$$

На границе раздела, которая остается заданной уравнением $y = 0$ во все моменты времени, автоматически выполняется кинематическое условие в силу вида точного решения ($v_1 = v_2 = 0$). Динамическое условие, условие баланса касательных напряжений, принимает вид:

$$u_{1,y} = \tilde{\rho}_2 \tilde{\nu}_2 u_{2,y} - \frac{Ma}{Pr} T_{1,x}|_{y=0}, \quad (7)$$

а динамическое условие, условие баланса нормальных напряжений, записывается в безразмерном виде с учетом уравнения границы раздела:

$$p_1 = p_2. \quad (8)$$

Здесь $Ma = \frac{\sigma_T T_* h_1}{\chi_1 \rho_{01} \nu_1}$, σ_T – температурный коэффициент поверхностного натяжения σ ($\sigma = \sigma(T) = \sigma_0 - \sigma_T(T - T_0)$, $\sigma_0 = const$, $\sigma_T = const$, $\sigma_0 > 0$, $\sigma_T > 0$).

Условие теплообмена на границе раздела, включающее члены, учитывающие баланс массы M и эффекты Дюфура и Соре, задается в виде:

$$T_{1,y} - \tilde{\lambda} T_{2,y} - \alpha^C \tilde{\lambda} C_y|_{y=0} = -LM, \quad M = -(C_y + \alpha^T T_{2,y})|_{y=0}. \quad (9)$$

Здесь $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ – отношение коэффициентов теплопроводности газа и жидкости; L – безразмерная величина, характеризующая скрытую теплоту парообразования L_r : $L = \frac{L_r \rho_{02} D}{\lambda_1 T_*}$.

Соотношение для концентрации насыщенного пара считается выполненным на границе раздела:

$$C = C_*(1 + \varepsilon(T_2 - T_0))|_{y=0} \quad (10)$$

В качестве замыкающего условия задается расход газопаровой смеси через поперечное сечение верхнего слоя

$$\int_0^h u_2(y, t) dy = Q(t), \quad (11)$$

где безразмерный расход газа $Q(t)$ – заданная функция времени.

Начальные условия (при $t = 0$) задаются, исходя из состояния покоя системы, прогретой до температуры T_0 , следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1(y, 0) &= u_1^0(y) = 0, & u_2(y, 0) &= u_2^0(y) = 0, \\ T_1(x, y, 0) &= T_1^0(x, y) = T_0, & T_2(x, y, 0) &= T_2^0 = T_0, \\ C(x, y, 0) &= C^0(x, y) = C_*. \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть распределения температуры и концентрации пара имеют вид:

$$\begin{aligned} T_i(x, y, t) &= H_i(y, t)x + F_i(y, t), \\ C(x, y, t) &= K(y, t)x + N(y, t), \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда задача (2)–(13) будет состоять в нахождении искомых функций u_i, p_i, H_i, F_i, K, N . Для нахождения перечисленных функций имеет место следующая цепочка задач.

$$u_{1,t} = u_{1,yy} - Gr \int_{-1}^y H_1(\xi, t) d\xi - Gr f_1^u(t), \quad (14)$$

$$H_{1,t} = \frac{1}{Pr} H_{1,yy}, \quad (15)$$

$$F_{1,t} + u_1 H_1 = \frac{1}{Pr} F_{1,yy}, \quad (16)$$

$$p_1 = \left(Gr \int_{-1}^y H_1(\xi, t) d\xi + Gr f_1^u(t) \right) x + Gr \int_{-1}^y F_1(\xi, t) d\xi + Gr f_1^p(t), \quad (17)$$

$$u_{2,t} = \tilde{\nu}_2 u_{2,yy} - Gr \tilde{\beta}_2 \int_0^y H_2(\xi, t) d\xi - Ga \beta^2 \int_0^y K(\xi, t) d\xi - Gr \tilde{\beta}_2 f_2^u(t), \quad (18)$$

$$H_{2,t} = \frac{\tilde{\chi}_2}{Pr} H_{2,yy} + \frac{\tilde{\chi}_2 \alpha^C}{Pr} K_{yy}, \quad (19)$$

$$F_{2,t} + u_2 H_2 = \frac{\tilde{\chi}_2}{Pr} F_{2,yy} + \frac{\tilde{\chi}_2 \alpha^C}{Pr} N_{yy}, \quad (20)$$

$$K_t = \frac{1}{Pe} K_{yy} + \frac{\alpha^T}{Pe} H_{2,yy}, \quad (21)$$

$$N_t + u_2 K = \frac{1}{Pe} N_{yy} + \frac{\alpha^T}{Pe} F_{2,yy}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} p_2 = & \left(\tilde{\rho}_2 Gr \tilde{\beta}_2 \int_0^y \tilde{H}_2(\xi, t) d\xi + \tilde{\rho}_2 Ga \beta^2 \int_0^y K(\xi, t) d\xi \right. \\ & \left. + Gr \tilde{\beta}_2 f_2^u(t) \right) x + \tilde{\rho}_2 Gr \tilde{\beta}_2 \int_0^y F_2(\xi, t) d\xi + \tilde{\rho}_2 Ga \beta^2 \int_0^y N(\xi, t) d\xi + \tilde{\rho}_2 Gr \tilde{\beta}_2 f_2^p(t). \end{aligned} \quad (23)$$

Границные и начальные условия для функций H_i, F_i, K, N есть следствие условий (3)–(10) и имеют следующий вид. На твердых стенках требуется выполнение соотношений:

$$\begin{aligned} u_1(-1, t) &= 0, & u_2(h, t) &= 0, \\ H_1(-1, t) &= A_1(t), & H_2(h, t) &= A_2(t), \\ F_1(-1, t) &= B_1(t), & F_2(h, t) &= B_2(t), \\ H_{1,y}|_{y=-1} &= 0, & (K_y + \alpha^T H_{2,y})|_{y=h} &= 0, \\ F_{1,y}|_{y=-1} &= 0, & (N_y + \alpha^T F_{2,y})|_{y=h} &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь и далее в граничных и дополнительных условиях считаем, что $A_i(t), B_i(t)$ – заданные функции. Пример задания функций представлен в разделе 2. Условие для концентрации пара, удовлетворяющего условию нулевого потока пара (5) на верхней границе $y = h$, приводит к двум равенствам:

$$K(0, t) = C_* \varepsilon H_2(0, t), \quad (25)$$

$$N(0, t) = C_* [1 + \varepsilon(F_2(0, t) - T_0)]. \quad (26)$$

На термокапиллярной границе раздела $y = 0$ условие непрерывности скорости (6) остается неизменным, а условие непрерывности температуры приводит к соотношениям:

$$H_1(0, t) = H_2(0, t), \quad (27)$$

$$F_1(0, t) = F_2(0, t). \quad (28)$$

Следствием динамического условия (8) являются соотношения

$$\int_{-1}^0 H_1(y, t) dy + f_1^u(t) = \tilde{\rho}_2 f_2^u(t), \quad (29)$$

$$\int_{-1}^0 F_1(y, t) dy + f_1^p(t) = f_2^p(t), \quad (30)$$

а следствием условия (7) – соотношение вида

$$u_{1,y} = \tilde{\nu}_2 \tilde{\rho}_2 u_{2,y} - \frac{Ma}{Pr} H_1(0, t). \quad (31)$$

Наконец, условие баланса тепловых потоков приводит к двум равенствам:

$$H_{1,y} - \tilde{\lambda} H_{2,y} - \tilde{\lambda} \alpha^C K_y = L(K_y + \alpha^T H_{2,y}), \quad (32)$$

$$F_{1,y} - \tilde{\lambda} F_{2,y} - \tilde{\lambda} \alpha^C N_y = L(N_y + \alpha^T F_{2,y}). \quad (33)$$

Отметим, что функции $f_i^u(t)$ и $f_i^p(t)$ (см. (17), (23)) связаны, благодаря динамическому условию (8), и с учетом вида решения для функции скорости и замыкающего постановку задачи соотношения (14), (18).

Начальные условия формулируются в виде:

$$\begin{aligned} H_i(y, 0) &= H_i^0(y), & F_i(y, 0) &= F_i^0(y), & K_i(y, 0) &= K_i^0(y), \\ N_i(y, 0) &= N_i^0(y), & u_i(y, 0) &= u_i^0(y), & i &= 1, 2. \end{aligned} \quad (34)$$

2. Численное моделирование и параметры расчета

Отметим, что представление цепочки задач для построения нестационарного решения специального вида и алгоритм их численного решения разработаны в [5] для задачи о моделировании течений в системе двух бинарных сред, включая и частный случай, реализованный в данной статье.

Представим общую схему численного решения задачи. Задача (2) сводится к последовательному нахождению функций H_i , F_i , K , N , u_i на каждом временном шаге. Временная сетка задается с шагом τ : $t^{n+1} = t^n + \tau$, $n = 1, 2, \dots, nk$, $t^{nk} = t_{end}$. Численный алгоритм реализуется следующим образом: на каждом временном слое последовательно решаются одномерные начально-краевые задачи для нахождения функций H_1 , H_2 , см. (15), (19), затем для нахождения функции K , см. (21), функций скорости u_1 , u_2 , см. (14), (18), функций F_1 , F_2 , см. (16), (20) и, наконец, функции N , см. (22) при начальных данных (34), дополнительном условии расхода газа (11) и граничных сопрягающих условиях (24)–(33). Функции давления восстанавливаются по формулам (17), (23). Используется неявные конечно-разностные схемы, приводящие на каждом временном шаге к решению трёхдиагональных систем линейных алгебраических уравнений, решение которых осуществляется методом прогонки. Интегралы вычисляются с применением составной формулы трапеций. После нахождения H_i , F_i , K , N поля температуры и концентрации восстанавливаются, согласно (13), и процедура расчета повторяется до достижения конечного времени расчета.

Для модельных расчетов использовались следующие физико-химические параметры сред определяются значениями (представлены в порядке ($i=1$) – этанол, ($i=2$) – воздух соответственно): $\rho_i = \{790, 1.205\}$ кг/м³, $\nu_i = \{1.5 \cdot 10^{-6}, 1.5 \cdot 10^{-5}\}$ м²/с, $\beta_i^1 = \{1.08 \cdot 10^{-3}, 3.67 \cdot 10^{-3}\}$ К⁻¹, $\lambda_i = \{0.1672, 0.0260\}$ Вт/(м·К), $\chi_i = \{1.0 \cdot 10^{-7}, 2.1 \cdot 10^{-5}\}$ м²/с. Для газовой фазы дополнительно заданы значения $D = 1.35 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $\beta_2 = -0.62$, $C_* = 0.0561$, $\varepsilon_* = 0.0568$, а для жидкости – $\sigma_T = 8.0 \cdot 10^{-5}$ Н/(м·К), $L_r = 8.55 \cdot 10^5$ Дж/кг. Параметры перекрестных эффектов термодиффузии принимаются равными $\alpha_r^C = 5.0 \cdot 10^{-4}$ К и $\alpha_r^T = 5.0 \cdot 10^{-3}$ К⁻¹. Ускорение свободного падения равно $g = g_0 = 9.81$ м/с² (при нормальной земной гравитации). В качестве характерного перепада температуры выбирается значение $T_* = 10$ К.

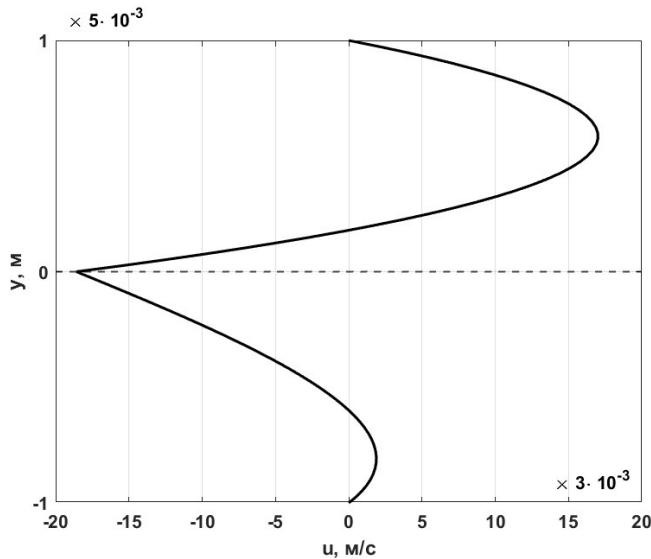


Рисунок 2. Профили продольной скорости

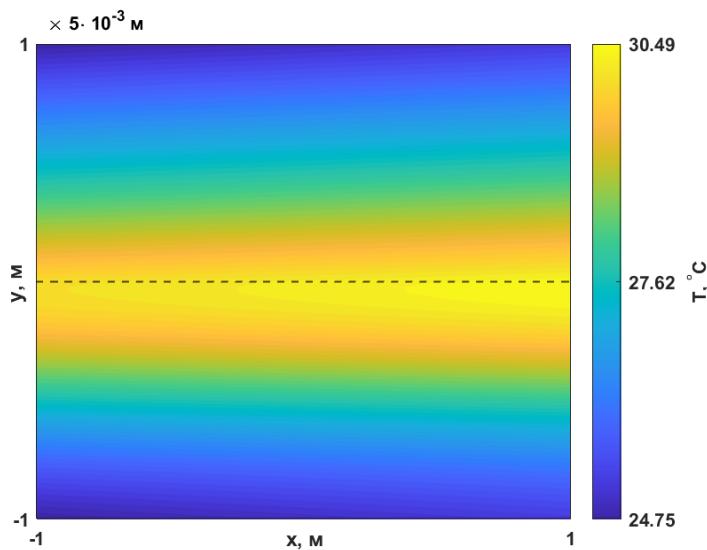


Рисунок 3. Распределение температуры

На рисунках 2 и 3 представлены профиль продольной скорости и распределение температуры в двухслойной системе с толщиной слоев $h_1 = h_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ м в момент времени $t_{end} = 300$ сек., $A(t) = A_0 + (A_1 - A_0) t / t_{end}$, где $A_0 = 10$ К/м и $A_1 = 50$ К/м ($0 \leq t \leq t_{end}$); $B_1(t) = B_2(t) = 25$ °С. Расход газопаровой смеси через поперечное сечение верхнего слоя

задавался линейным по времени $Q(t) = Q_0 + (Q_1 - Q_0)t/t_{end}$, где $Q_0 = 5.5539 \cdot 10^{-4}$ и $Q_1 = 5.6961 \cdot 10^{-4}$ кг/(м · с).

3. Заключение

В работе изучаются нестационарные конвективные течения в двухслойной системе жидкости и газопаровой смеси в плоском канале, вызванные совместным действием продольного температурного градиента и поперечного поля силы тяжести. На основе нестационарного обобщения известного решения Бириха (специального вида вектора скорости, полей температуры и концентрации и при граничных условиях, описывающих диффузионный процесс испарения на термокапиллярной поверхности раздела построен численный алгоритм нахождения всех искомых функций в результате последовательного решения цепочки начально-краевых задач.

Список литературы

1. Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. — 1966. — № 3. — С. 69–72.
2. Пухначев В.В. Теоретико-групповая природа решения Бириха и его обобщения // Труды II Международной конференции “Симметрия и дифференциальные уравнения”. — Красноярск : ИВМ СО РАН, 2000. — С. 180–183.
3. Бирих Р.В., Пухначев В.В. Осевое конвективное течение во вращающейся трубе с продольным градиентом температуры // ДАН. — 2011. — Т. 436, № 3. — С. 323–327.
4. Bekezhanova V.B., Stepanova I.V. Mathematical modeling of concentration influence on evaporative convection in a bilayer system of binary mixtures // International Journal of Heat and Fluid Flow. — 2024. — Vol. 107. — P. 109385.
5. Бекежанова В.Б., Степанова И.В. Аналог решения Бириха для описания течений с испарением // Рукопись. — 2025.