УДК 512.545

Многообразие, порожденное ℓ-группой Скримджера

Баянова Н.В.,Чурбанов К.А.

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

bayanova@math.asu.ru, kostya.churbanov.22@gmail.com

Аннотация

Хорошо известно, что каждое тождество сигнатуры ℓ равносильно соответствующему квазитождеству сигнатуры ℓ, поэтому любое многообразие ℓ-групп является квазимногообразием ℓ-групп. Обратное в общем случае несправедливо. В работе доказывается, что многообразие, порожденное группой Скримджера совпадает с квазимногообразием, порожденным группой Скримджера.

Ключевые слова: Решеточно упорядоченная группа, многообразие, квазимногообразие, ℓ-группа, группа Скримджера, p-дент

1. Предварительные сведения

Напомним, что решеточно упорядоченная группа (ℓ-группа) – это алгебраическая система G сигнатуры $\ell = \langle \cdot, ^{-1}, e, \vee, \wedge \rangle$, совмещающая в себе структуру группы и решеточного порядка, связанные естественными соотношениями

$$x(u \vee v)y = xuy \vee xvy, \;\; x(u \wedge v)y = xuy \wedge xvy.$$

Группа G называется линейно упорядоченной, если все элементы группы сравнимы между собой, т.е. для любых $x \in G, y \in G$ либо $x \leq y$ или $y \leq x$.

Подмножество H решеточно (линейно) упорядоченной группы G называется выпуклым, если для любых элементов $x, y, z \in G$ таких, что $x, z \in H$ и $x \leq y \leq z$, следует, что $y \in H$.

Подгруппа H ℓ-группы G называется ℓ-подгруппой G, если для всякого $h \in H$ элемент $h \vee e$ принадлежит H.

Решеточно упорядоченную группу G называют подпрямо неразложимой тогда и только тогда, когда G имеет наименьшую собственную выпуклую ℓ-подгруппу.

Класс K алгебраических систем сигнатуры ℓ называется многообразием (квазимногообразием) сигнатуры ℓ, если существует множество Φ тождеств (квазитождеств) сигнатуры ℓ такое, что K состоит из всех алгебраических систем сигнатуры ℓ, на которых истинны все тождества (квазитождества) из Φ.

Для произвольного класса K ℓ-групп обозначим через $H(K)$, $S(K)$, $P(K)$, $P_u(K)$ классы ℓ-групп, которые являются соответственно гомоморфными образами, ℓ-подгруппами, декартовыми произведениями и ультрапроизведениями элементов из класса K.

Обозначим через $var_\ell(K)$ многообразие ℓ-групп, порожденное классом K ℓ-групп, а через $q_\ell(K)$ квазимногообразие ℓ-групп, порожденное классом K, т.е. наименьшее многообразие (квазимногообразие) ℓ-групп, содержащее класс K. Описание многообразия и квазимногообразия, порожденного произвольным классом K ℓ-групп дают следующие теоремы.

Теорема 1 ([1]). *Для произвольного класса K ℓ-групп $var_\ell(K) = HSP(K)$.*

Теорема 2 ([1]). *Для произвольного класса K ℓ-групп $q_\ell(K) = SPP_U(K)$.*

Хорошо известно, (см., например, [2]) что каждое тождество равносильно соответствующему квазитождеству, поэтому любое многообразие ℓ-групп является квазимногообразием ℓ-групп. Обратное в общем случае несправедливо.

Согласно [3], группа $G = D(T, H, K, \mu)$ называется p-дентом, если
(1) T есть ненулевая абелева линейно упорядоченная группа,
(2) H является прямой суммой p копий группы T,
(3) $K = G/H$ является абелевой линейно упорядоченной группой,
(4) $\mu : G \to Z_p-$ эпиморфизм такой, что для $h \in H$, $g \in G$,

$$(h^g)(i) = h(i - \mu(g)),\ i = 0, \ldots, p-1.$$

Замечание 1. *Для абелевых групп используется аддитивная форма записи.*

Согласно [4] группа Скримджера определяется следующим образом

$$S_p = \text{гр}(b_p,\ a_{1p}, \ldots, a_{pp} :\ b_p^{-1} a_{ip} b_p = a_{jp}\ (j \equiv i + 1 (mod\ p)),$$

$$[a_{ip}, a_{jp}] = e,\ \ \forall\ i, j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}).$$

Решеточный порядок задается по правилу: $x = b_p^n a_{1p}^{k_1} ... a_{pp}^{k_p} \geq e$ в $S_p \Leftrightarrow n > 0$ или $n = 0$ и $k_1 \geq 0, \ldots, k_p \geq 0$.

Многообразие ℓ-групп, заданное тождеством $[x^p, y^p] = e$, где p – простое число обозначим L_p. Свойства многообразия L_p изучались в [5]. Непосредственная проверка показывает, что группа Скримджера принадлежит многообразию L_p.

Все необходимые определения и утверждения по теории ℓ-групп можно найти в [1] и [4], а по теории групп в [6].

2. Свойства p-дентов многообразия L_p

Все сформулированные в этом пункте утверждения доказаны в [3].

Лемма 1. *p-дент $G = D(T, H, K, \mu)$ является подпрямо неразложимым тогда и только тогда, когда T – подпрямо неразложимая группа.*

Лемма 2. *Любой p-дент $G = D(T, H, K, \mu)$ вложим в p-дент $G^* = D(T^*, H^*, K, \mu^*)$, где T^* и H^* это пополнение групп T и H соответственно. Если $G \in L_p$, то и $G^* \in L_p$.*

Предложение 1. *Пусть $G = D(T, H, K, \mu)$ – p-дент в L_p такой, что H полная группа. Тогда G – расщепляемый p-дент.*

Следствие 1. *Любой p-дент $G = D(T, H, K, \mu) \in L_p$ вложим в расщепляемый p-дент вида $G^* = D(T^*, H^*, K, \mu) \in L_p$, где T^* и H^* это пополнение групп T и H соответственно.*

Лемма 3. *Если $K = \langle \beta_1, \ldots, \beta_m \rangle$ – конечно порожденная абелева линейно упорядоченная группа и U неглавный ультрафильтр на множестве ω неотрицательных целых чисел, и Z – линейно упорядоченная группа целых чисел, тогда K вложима в ультрастепень Z^ω/U.*
(1) Это можно сделать так, что для каждого $i \in \omega$, $\beta_1(i) \equiv 1(mod\ p)$ и для $j > 1$, $\beta_j(i) \equiv 0(mod\ p)$.
(2) Можно вложить так, чтобы расширить до вложения пополнения K^* в Z^ω/U.

Отметим, что в ходе доказательства теоремы 6.1 из [3] было показано, что подпрямо неразложимые ℓ-группы из многообразия $var_\ell(S_p)$ являются p-дентами.

Группу Скримджера S_p можно представить в виде p-дента: $S_p = D(Z, L, Z; \gamma)$, где $L-$ прямая сумма p копий линейно упорядоченной группы Z целых чисел и $\gamma(1)$ циклически переставляет эти копии. Если G – расщепляемый p-дент, его строение определяется группами H, K и действием μ. Из леммы 3 следует, что T можно вложить в Z^ω/U. Если K вложено в Z^ω/U как в лемме 3, то можно расширить вложение K и H до вложения G в S_p^ω/U.

3. Основной результат

Теорема 3. *Справедливо* $var_\ell(S_p) = q_\ell(S_p)$.

Доказательство. Хорошо известно, что любое многообразие и квазимногообразие определяется множеством своих конечно порожденных групп. Пусть G – конечно порожденная ℓ-группа из $var_\ell(S_p)$. Из теоремы 1 следует, что G является ℓ-подгруппой декартова произведения $\overline{\prod} H_i$, где H_i – конечно порожденные подпрямо неразложимые ℓ-группы из $var_l(S_p)$. Как доказано в [3] каждая H_i- является p-дентом и вкладывается в ультрастепень S_p^ω/U, где $U-$ неглавный ультрафильтр на множестве ω неотрицательных целых чисел. Поскольку $S_p^\omega/U \in q_\ell(S_p)$ получаем, что $\overline{\prod} H_i \in q_\ell(S_p)$. Таким образом, любая конечно порожденная группа G из $var_\ell(S_p)$ принадлежит $q_\ell(S_p)$. Значит, $var_\ell(S_p) \subseteq q_\ell(S_p)$. Обратное включение очевидно. □

Предложение 2 ([7]). *Всякая некоммутативная ℓ-группа из $var_\ell(S_p)$ содержит ℓ-подгруппу, ℓ-изоморфную группе S_p.*

Следствие 2. *Для любой неабелевой ℓ-группы $G \in var_\ell(S_p)$ верно $q_\ell(G) = var_\ell(S_p)$.*

Доказательство. Из предложения 2 следует, что любая неабелева ℓ-группа G из $var_\ell(S_p)$ содержит ℓ-подгруппу, ℓ-изоморфную группе S_p. Тогда получаем, что $q_\ell(G) \supseteq q_\ell(S_p) = var_\ell(S_p)$. С другой стороны, $q_\ell(G) \subseteq var_\ell(S_p)$. Следовательно, $q_\ell(G) = var_\ell(S_p)$. □

Список литературы

1. Kopytov V.M., Medvedev N.Ya. The Theory of Lattice-Ordered Groups. — Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 1994.

2. Мальцев А.И. Алгебраические системы. — М. : Наука, 1970.

3. Holland W.C., Reilly N.R. Structure and Laws of the Scrimger Varieties of Lattice-Ordered Groups // Algebra and Order Proc. First Int. Symp. Ordered Algebraic Structures, Luminy-Marseilles 1984 / Ed. by S. Wolfenstein. — Berlin : Heldermann, 1986. — P. 71–81.

4. Копытов В.М. Решеточно упорядоченные группы. — М. : Наука, 1984.

5. Гурченков С.А. Многообразия ℓ-групп с тождеством $[x^p y^p] = e$ конечнобазируемы // Алгебра и логика. — 1984. — № 1(23). — С. 20–35.

6. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. — М. : Наука, 1982.

7. Scrimger E.B. A large class of small varieties of lattice-ordered groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1975. — no. 51. — P. 301–306.