

# Аналитическое и численное решение задачи слоистого течения вязкоупругой жидкости с двумя параметрами релаксации

Петрова А.Г., Шарипов Е.С.

Алтайский государственный университет, г. Барнаул  
annapetrova07@mail.ru, jendossh@mail.ru

## Аннотация

В работе исследуется слоистое течение релаксирующей жидкости в зависимости от значений параметров релаксации, которые считаются малыми. Численное решение начально-краевой задачи проводится на основе неявной схеме для уравнения, полученного из исходного псевдогиперболического понижением порядка по временной переменной [1]. Найдены условия возникновения колебаний решения.

*Ключевые слова:* Вязкоупругая жидкость, псевдопараболические и псевдогиперборлические уравнения, разностная схема

## 1. Постановка задачи

Реологические соотношения в основных моделях вязкоупругих жидкостей, таких, как модель Олдройда или Джейффриса, модель Павловского водных растворов полимеров, модель жидкости второго порядка, максвелловская жидкость описываются следующим двухпараметрическим семейством уравнений состояния [2–5]:

$$\mathbf{S} + \lambda_1 \frac{D}{Dt} \mathbf{S} = 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{v}) + 2\mu \lambda_2 \frac{D}{Dt} (\mathbf{D}(\mathbf{v})), \quad \mathbf{S}|_{t=0} = \mathbf{S}_0, \text{ если } \lambda_1 \neq 0 \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{S}$  – дополнительный тензор такой, что тензор напряжений имеет вид  $\mathbf{P} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S}$ ;  $\lambda_1$  – время релаксации напряжения при постоянной деформации;  $\lambda_2$  – время ретардации, т.е. время релаксации деформации при постоянном напряжении;  $\mu$ -вязкость; тензор  $D$  определяется следующим образом:  $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$ ; символ  $\frac{D}{Dt}$  – оператор дифференцирования по времени. В классической работе Олдройда [2], в ряде других теоретических работ, в том числе и более современных, это объективная производная. Однако, это может быть как полная (конвективная) производная, так и частная производная (модели Кельвина-Фойгта, Осколкова). При описании движения слабых растворов полимеров зачастую считают  $\lambda_1 = 0$ . Если при этом  $\frac{D}{Dt}$  – производная Яуманна, то уравнение (1) будет моделировать жидкость 2-го порядка (Ривлин – Эриксен, [3]). Если же  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_1 > 0$ , то получим жидкость максвелловского типа.

Управляющие уравнения для движения несжимаемой жидкости с реологическим законом (1) имеют вид

$$\rho(\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = -\nabla p + \operatorname{div} \mathbf{S}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

Модель (1), (2) содержит два малых параметра  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

Рассмотрим задачу с двумя параметрами. Для слоистого течения имеем

$$u = u(y, t), \quad v = w = 0, \quad p = p(y, t), \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} a(y, t) & b(y, t) \\ b(y, t) & c(y, t) \end{pmatrix}$$

В случаях верхней и нижней конвективных производных задача остается линейной для ненулевой компоненты скорости и, дополненная начальными и граничными условиями имеет вид:

$$\lambda_1 u_{tt} + u_t = \nu u_{yy} + \lambda_2 \nu u_{yyt}, \quad (\nu = \mu/\rho), 0 < y < l, t > 0 \quad (3)$$

$$u(y, 0) = u_0(y), \quad u_t(y, 0) = u_1(y) \quad (4)$$

$$u(0, t) = f(t), \quad u(l, t) = g(t) \quad (5)$$

## 2. Решение методом Фурье

Для  $u_0(y), u_1(y) \in C^4(\bar{\Omega})$ ;  $u_0(0) = u_0(l) = u_1(0) = u_1(l) = 0$ ;

$$\frac{d^2 u_0}{dy^2} \Big|_{y=0} = \frac{d^2 u_0}{dy^2} \Big|_{y=l} = \frac{d^4 u_1}{dy^2} \Big|_{y=0} = \frac{d^4 u_1}{dy^2} \Big|_{y=l} = 0.$$

будем искать решение (3)-(5) в виде ряда Фурье

$$u(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{l}y\right) (C_{1n} \exp(k_{1n}t) + C_{2n} \exp(k_{2n}t)).$$

Здесь  $k_{1n}$  и  $k_{2n}$ , являются корнями характеристического уравнения для функции, зависящей от времени, которое имеет вид:

$$\lambda_1 k^2 + k \left( 1 + \lambda_2 \nu \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 \right) + \nu \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 = 0.$$

При  $\lambda_1 > 0$

$$k_{1n}, k_{2n} = \frac{-1 - \lambda_2 \nu \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \pm \sqrt{\left( 1 + \lambda_2 \nu \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \right)^2 - 4\lambda_1 \nu \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2}}{2\lambda_1} < 0$$

$$\lambda_1 = 0 : \quad k_n = -\frac{\nu \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2}{1 + \lambda_2 \nu \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2} \sim -\nu \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 + \lambda_2 \nu^2 \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4 + O(\lambda_2^2), \quad \lambda_2 \rightarrow 0.$$

$C_{1n}$  и  $C_{2n}$  находятся из системы 2-ух линейных уравнений [6]

$$C_{1n} + C_{2n} = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(y) \sin\left(\frac{n\pi}{l}y\right) dy, \quad k_{1n}C_{1n} + k_{2n}C_{2n} = \frac{2}{l\rho} \int_0^l \text{div}S_0(y) \sin\left(\frac{n\pi}{l}y\right) dy.$$

Колебания, отражающие гиперболическую природу задачи, возникают при выполнении неравенства

$$\left( 1 + \lambda_2 \nu \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \right)^2 < 4\lambda_1 \nu \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2$$

В частности, при начальных условиях

$$u_0(y) = \sin\left(\frac{\pi}{l}y\right), \quad u_1(y) = 0$$

решение имеет вид

$$u(y, t) = \sin\left(\frac{\pi}{l}y\right) \left[ \frac{k_2}{k_1 + k_2} \exp(k_1 t) + \frac{k_1}{k_1 + k_2} \exp(k_2 t) \right] \quad (6)$$

Колебательный режим возникнет при выполнении неравенства

$$\lambda_1 > \left( \frac{1 + \lambda_2 \nu \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2}{2\sqrt{\nu} \frac{n\pi}{l}} \right)^2 \quad (7)$$

Решение (6) будет в дальнейшем использовано для тестирования численного решения

### 3. Построение численного алгоритма

Для построения численного алгоритма умножим уравнение (3) на  $e^{t/\lambda_2}$  [1]. Интегрируя полученное уравнение от 0 до  $t$ , получим:

$$\lambda_1 \int_0^t u_{\tau\tau} e^{\frac{\tau}{\lambda_2}} d\tau + \int_0^t u_\tau e^{\frac{\tau}{\lambda_2}} d\tau = \mu \int_0^t u_{yy} e^{\frac{\tau}{\lambda_2}} d\tau + \mu \lambda_2 \int_0^t u_{yy\tau} e^{\frac{\tau}{\lambda_2}} d\tau$$

Интегрируя уравнение по частям и разделив на  $e^{t/\lambda_2}$ , получаем

$$\lambda_1 u_t + u \left( 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) - \lambda_2 \mu u_{yy} = \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2^2} \right) \int_0^t u e^{(\tau-t)/\lambda_2} d\tau + \lambda_1 u_1 e^{-t/\lambda_2} + u_0 e^{-t/\lambda_2} \left( 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) - \lambda_2 \mu e^{-t/\lambda_2} (u_0)_{yy}$$

Напишем разностную схему, собирая общие множители

$$u_j^{i+1} \left( \frac{\lambda_1}{\tau} + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2} + \frac{2\mu\lambda_2}{h^2} - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2} \tau \right) + u_{j+1}^{i+1} \left( -\frac{\lambda_2 \mu}{h^2} \right) + u_{j-1}^{i+1} \left( -\frac{\lambda_2 \mu}{h^2} \right) = \\ \frac{\lambda_1}{\tau} u_j^i + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2^2} \sum_{k=0}^{i-1} u_j^{i+1} e^{(t_k - t_i)/\lambda_2} + \lambda_1 e^{-t_i/\lambda_2} u_j^1 + e^{-t_i/\lambda_2} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2} u_j^0 - \lambda_2 \mu e^{-t_i/\lambda_2} (u_0)_{yy}$$

где  $\tau$  и  $h$  – шаг по времени и пространству

Находим численное решение методом прогонки. Обозначим за  $l_1$  и  $l_2$  начальное и конечное значение отрезка по пространству, за  $T$  обозначим конечное время,  $N_y$  и  $N_t$  – количество шагов по пространству и времени. Тогда шаг по времени и пространству соответственно равны:

$$h = \frac{l_2 - l_1}{N_y}; t = \frac{T}{N_t}$$

Для метода прогонки трёхдиагональная матрица будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} A & C & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ B & A & C & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & B & A & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A & C & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & B & A & C \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & B & A \end{pmatrix}$$

где

$$A = \frac{\lambda_1}{\tau} + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2} + \frac{2\mu\lambda_2}{h^2} - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2} \tau; B = -\mu \frac{\lambda_2}{h^2}; C = -\mu \frac{\lambda_2}{h^2};$$

матрица  $B$  в правой части будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{N_y} \end{pmatrix}$$

где  $B_j$ ,  $j \in (1, 2, \dots, N_y)$  равен:

$$B_j = \frac{\lambda_1}{\tau} u_j^i + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2^2} \sum_{k=0}^{i-1} u_j^{i+1} e^{(t_k - t_i)/\lambda_2} + \lambda_1 e^{-t_i/\lambda_2} u_j^1 + e^{-t_i/\lambda_2} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2} u_j^0 - \lambda_2 \mu e^{-t_i/\lambda_2} (u_0)_{yy}$$

и пересчитывается на каждом временном слое. Устойчивость по начальным, граничным значениям и сходимость данной разностной схемы установлена в [1]

#### 4. Численный анализ

Рассмотрим решение полученное при решении уравнения с начальными и граничными значениями на интервале  $l \in [0; 1]$ ,  $t \in [0; 2]$

$$u(y, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{l}y\right), \quad u_t(y, 0) = 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$$

Рассмотрены два варианта: (7) нарушено (рисунки 1, 2) – монотонное убывание искомой функции и (7) выполнено (рисунки 3, 4) – колебания с убывающей амплитудой.

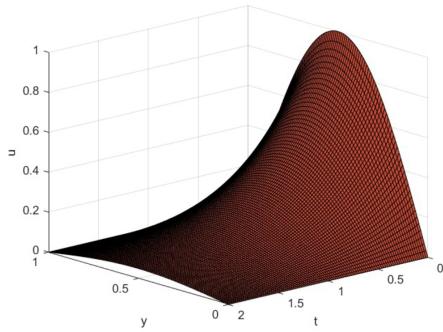


Рисунок 1. Точное решение при  
 $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.5$ ,  $\mu = 0.5$

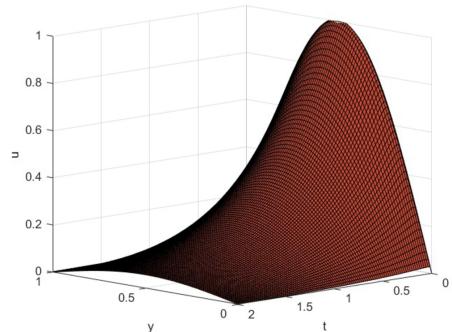


Рисунок 2. Численное решение  
при  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.5$ ,  $\mu = 0.5$

Рисунки 1, 2 и 5 демонстрируют достаточную близость точного и численного решений.

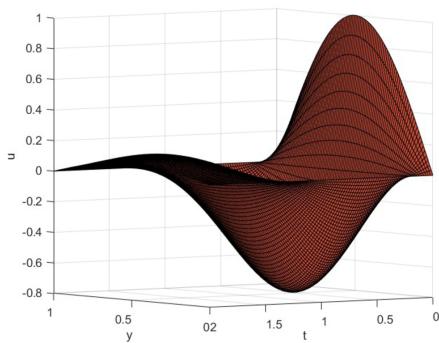


Рисунок 3. Точное решение при  
 $\lambda_1 = 0.5$ ,  $\lambda_2 = 0.1$ ,  $\mu = 0.5$

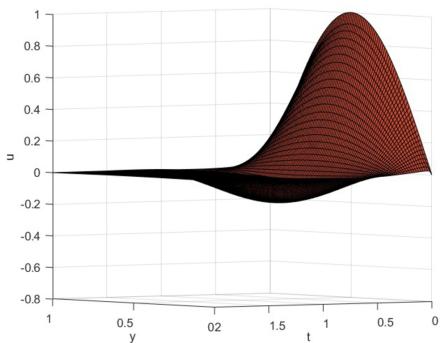


Рисунок 4. Численное решение  
при  $\lambda_1 = 0.5$ ,  $\lambda_2 = 0.1$ ,  $\mu = 0.5$

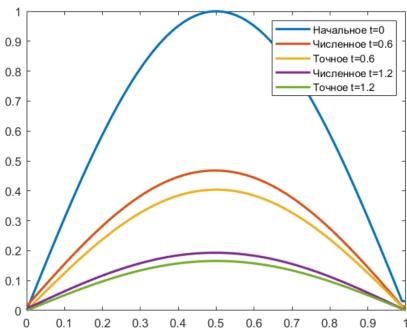


Рисунок 5. Решения при  $\lambda_1 = 0.1$ ,  
 $\lambda_2 = 0.5$ ,  $\mu = 0.5$

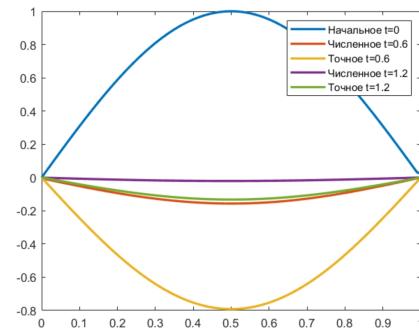


Рисунок 6. Решения при  $\lambda_1 = 0.5$ ,  
 $\lambda_2 = 0.1$ ,  $\mu = 0.5$

Рисунки 3, 4 и 6 показывают существенное отличие в амплитуде колебаний на начальном этапе. С течением времени различие слаживается.

Теперь решим численно следующую задачу:  $l \in [-1; 1]$ ,  $t \in [0; 2]$  с начальными и граничными значениями

$$\begin{aligned} u(y, 0) &= y^2 - 1, & u_t(y, 0) &= y \\ u(-1, t) &= e : 2, & u(1, t) &= 0 \end{aligned}$$

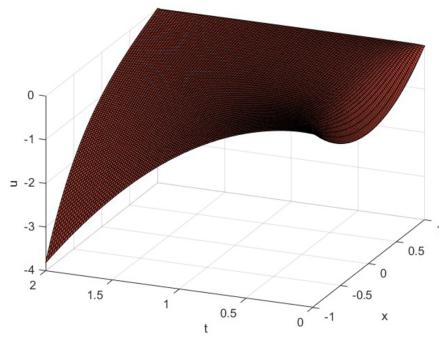


Рисунок 7. Решения при  $\lambda_1 = 0.1$ ,  
 $\lambda_2 = 0.5$ ,  $\mu = 0.5$

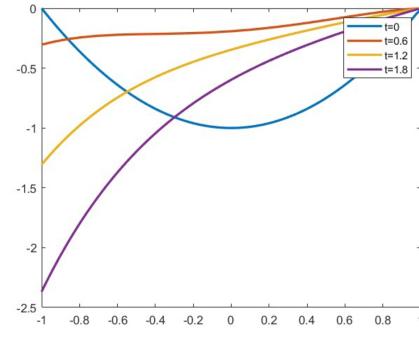


Рисунок 8. Решения при  $\lambda_1 = 0.5$ ,  
 $\lambda_2 = 0.1$ ,  $\mu = 0.5$

Рисунок 7 соответствует «параболическому» режиму, т.е. условие возникновения колебаний (7) нарушено, тогда, как рисунок 8 демонстрирует колебательный «гиперболический» режим, когда условие (7) выполнено.

## 5. Заключение

Статья посвящена аналитическому и численному решению первой начально-краевой задачи течения слоистой жидкости с двумя параметрами релаксации. Показано, что при переходе через некоторое критическое значение времен релаксации при постоянном напряжении возникает колебательный режим, свойственный гиперболическим уравнениям. Аналитические решения в виде рядов Фурье иллюстрированы графиками, полученными в результате численного решения начально-краевых задач для псевдогиперболического уравнения.

## Список литературы

1. Бештоков М.Х. Конечно-разностный метод решения многомерного псевдопараболического уравнения с граничными условиями третьего рода // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2022. — Т. 32, № 4. — С. 502–527.
2. Олдройд Дж.Г. Неньютоновское течение жидкостей и твердых тел // Реология: теория и приложения. — М. : Изд-во иностр. лит., 1962. — С. 757–793.
3. Rivlin R.S., Ericksen J.L. Stress-deformation relations for isotropic materials // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1955. — Vol. 4. — P. 323–425.
4. Астарита Дж., Маруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. — М. : Мир, 1978.
5. Мелешко С.В., Петрова А.Г., Пухначев В.В. Характеристические свойства системы уравнений несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. — 2017. — Т. 58, № 5. — С. 44–50.
6. Петрова А.Г. Асимптотический анализ моделей вязкоупругих жидкостей с двумя малыми параметрами релаксации // Прикладная механика и техническая физика. — 2024. — Т. 65, № 5. — С. 157–168.