

# Взаимодействие ледового покрова с движущейся внешней нагрузкой в замкнутом водоеме<sup>1</sup>

Сибирякова Т.А., Шишмарев К.А., Серых К.С.  
 Алтайский государственный университет, г. Барнаул  
 sibirakova.tatiana@mail.ru, shishmarev.k@mail.ru, s.kirill123@mail.ru

## Аннотация

Рассмотрена двумерная задача о колебаниях ледовой пластины в замкнутом водоеме, вызванных движением внешней нагрузки. Задача решается с использованием нормальных мод колебаний упругой балки, сведена к системе ОДУ второго порядка и решена методом Рунге-Кутты. Рассмотрен случай циклического движения внешней нагрузки от левого края к правому и обратно. Результаты исследования могут использоваться, в частности, в задачах о безопасной транспортировке грузов.

**Ключевые слова:** Ледовая пластина, замкнутый водоем, внешняя нагрузка, потенциал, нормальные моды, метод Рунге-Кутты, прогибы льда, деформации

## 1. Постановка задачи

Рассматривается нестационарная двумерная задача о колебаниях ледового покрова в ограниченном замороженном водоеме, вызванные движением внешней нагрузки. Водоем имеет прямоугольное сечение ширины  $2L$  ( $-L < \tilde{x} < L$ ) и глубины  $H$  ( $-H < \tilde{z} < 0$ ) в декартовой системе координат  $O_{\tilde{x}\tilde{z}}$ . Ледовый покров моделируется как тонкая упругая пластина постоянной толщины в рамках линейной теории гидроупругости, а его концы закреплены на стенках водоема  $\tilde{x} = \pm L$ . Область подо льдом заполнена идеальной несжимаемой жидкостью. Внешняя нагрузка, представляющая собой гладкое локализованное распределение давления [1], совершает движение от одного края водоема к другому и обратно со скоростью  $U(\tilde{t})$ .

Прогибы ледового покрова  $\tilde{w} = \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t})$ , которые являются вертикальными отклонениями срединной поверхности от состояния покоя  $\tilde{z} = 0$ , описываются в рамках теории Кирхгофа-Лява тонких пластин

$$M\tilde{w}_{\tilde{t}\tilde{t}} + D\tilde{w}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} = \tilde{p}(\tilde{x}, 0, \tilde{t}) + \tilde{P}(\tilde{x}, \tilde{t}) \quad (-L < \tilde{x} < L, \quad \tilde{z} = 0), \quad (1)$$

где  $M = \rho_i h_i$  – масса льда на единицу площади,  $\rho_i$  – плотность ледового покрова,  $h_i$  – толщина льда,  $D = Eh_i^3/(12(1-\nu^2))$  – изгибная жесткость,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\tilde{P}(\tilde{x}, \tilde{t})$  – давление, оказываемое внешней нагрузкой на ледовую пластину,  $\tilde{p}(\tilde{x}, 0, \tilde{t})$  – гидродинамическое давление, действующее на нижнюю поверхность ледового покрова,  $\tilde{t}$  – время.

Прогиб льда удовлетворяет условиям жесткого защемления на стенках водоема и начальным условиям

$$\tilde{w} = \tilde{w}_{\tilde{x}} = 0 \quad (\tilde{x} = \pm L), \quad \tilde{w}(\tilde{x}, 0) = w_0, \quad \tilde{w}_{\tilde{t}}(\tilde{x}, 0) = 0. \quad (2)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке проекта «Современные модели гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (2024-26) (гос. задание FZMW-2024-0003).

Гидродинамическое давление на границе раздела лед–жидкость задается линейризованным интегралом Коши-Лагранжа

$$\tilde{p}(\tilde{x}, 0, \tilde{t}) = -\rho_l g \tilde{w} - \rho_l \tilde{\varphi}_{\tilde{t}} \quad (-L < \tilde{x} < L) \quad (3)$$

где  $g$  – модуль ускорения силы тяжести и  $\tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t})$  – потенциал скорости течения жидкости в водоеме, вызванного прогибом пластины. Потенциал скорости  $\tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t})$  удовлетворяет уравнению Лапласа в области течения

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{\varphi}_{\tilde{z}\tilde{z}} = 0 \quad (-L < \tilde{x} < L, \quad -H < \tilde{z} < 0), \quad (4)$$

условиям непротекания на дне и стенках водоема,

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{x}} = 0 \quad (\tilde{x} = \pm L), \quad \tilde{\varphi}_{\tilde{z}} = 0 \quad (\tilde{z} = -H), \quad (5)$$

а также начальному условию и кинематическому условию на границе лед-жидкость

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{z}, 0) = 0, \quad \tilde{\varphi}_{\tilde{z}} = \tilde{w}_{\tilde{t}} \quad (\tilde{z} = 0). \quad (6)$$

Поскольку рассматривается замкнутый водоем, заполненный идеальной несжимаемой жидкостью, без притока или оттока жидкости, то поток жидкости через границу лед-жидкость должен быть равен нулю. Это приводит к интегральному условию для потенциала скорости течения жидкости на границе лед-жидкость

$$\int_{-L}^L \tilde{\varphi}_{\tilde{z}} d\tilde{x} = 0.$$

После интегрирования по  $\tau$  от 0 до  $t$  с учетом кинематического условия (6) и начального условия для прогибов льда (2) интегральное условие переписывается в терминах прогибов  $\tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t})$

$$\int_{-L}^L \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t}) d\tilde{x} = \int_{-L}^L w_0 d\tilde{x}. \quad (7)$$

Внешняя нагрузка  $\tilde{P}(\tilde{x}, \tilde{t})$  моделируется гладкой локализованной функцией

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\tilde{x}, \tilde{t}) &= \tilde{P}(x_1(\tilde{t})) = -P_0 P_1 \left( \frac{x_1}{L} \right) \quad (-L < \tilde{x} < L), \\ P_1 \left( \frac{x_1}{L} \right) &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi c x_1}{L} + 1 \right) & \left( c \left| \frac{x_1}{L} \right| < 1 \right), \\ 0 & \left( c \left| \frac{x_1}{L} \right| \geq 1 \right), \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

где  $x_1 = x_0 + s(\tilde{t})$ ,  $x_0$  – начальное положение центра внешней нагрузки,  $U(\tilde{t}) = s'(\tilde{t})$ ,  $P_0$  – амплитуда внешнего давления,  $c$  – безразмерный параметр внешней нагрузки, характеризующий размер оказываемого ею давления.

Задача (1) – (8) решается в безразмерных переменных. Безразмерная глубина водоема  $H/L$  обозначается как  $h$ , размерные переменные обозначаются знаком  $\sim$ , а безразмерные записываются без знака  $\sim$

$$\tilde{x} = xL, \quad \tilde{z} = zL, \quad \tilde{t} = \frac{L}{U_0} t, \quad \tilde{P} = P_0 P,$$

где  $L$  – масштаб длины,  $L/U_0$  – масштаб времени,  $P_0$  – масштаб давления,  $U_0$  – характерная скорость. Решение задачи (1) – (8) ищется в виде

$$\tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t}) = w_{sc} w(x, t), \quad \tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \varphi_{sc} \varphi(x, z, t),$$

где  $w_{sc}$  – масштаб прогибов льда и  $\varphi_{sc}$  – масштаб потенциала скорости течения жидкости.

Система уравнений (1) – (8) в безразмерных переменных переписывается следующим образом

$$\alpha h^2 \text{Fr}^2 w_{tt} + \beta w_{xxxx} + w = -h \text{Fr}^2 \varphi_t + P \quad (z = 0), \quad (9)$$

$$w = w_x = 0 \quad (x = \pm 1), \quad \int_{-1}^1 w dx = \int_{-1}^1 w_0 dx, \quad w_t(x, 0) = 0. \quad (10)$$

$$\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0, \quad \varphi_x = 0 \quad (x = \pm 1), \quad (11)$$

$$\varphi_z = w_t \quad (z = 0), \quad \varphi_z = 0 \quad (z = -h), \quad \varphi(x, z, 0) = 0. \quad (12)$$

$$\varphi_x = 0 \quad (x = \pm 1), \quad \varphi_z = 0 \quad (z = -h). \quad (13)$$

где  $\alpha = \frac{\rho_i h_i}{\rho_l H}$  – отношение масс льда и жидкости на единицу площади,  $\text{Fr} = \frac{U_0}{\sqrt{gH}}$  – число Фруда,  $\beta = \frac{D}{\rho_l g L^4}$  – безразмерная жесткость. Масштаб прогибов льда задается как  $w_{sc} = P_0/(\rho_l g)$ , а масштаб потенциала скорости течения жидкости  $\varphi_{sc} = U_0 w_{sc} = U_0 P_0/(\rho_l g)$ .

Задача (9) – (13) зависит от указанных выше четырех безразмерных параметров, вычисляемых по заданным характеристикам ледовой пластины и жидкости, размерам водоема и параметрам внешней нагрузки. Необходимо вычислить потенциал скорости течения жидкости  $\varphi$ , затем с его помощью найти главную в решении поставленной задачи искомую функцию  $w$ . На основе этой функции определяются максимальные деформации в ледовой пластине для заданных параметров.

Основной целью исследования в рамках линейной теории гидроупругости является определение в ледовой пластине областей, которые имеют максимальные деформации, которые могут привести к деформациям в ледовой пластине, которые превышают предел текучести материала. Если деформации больше предела текучести, то использование линейной теории гидроупругости является некорректным, например, для исследования развития разрушений ледовой пластины.

## 2. Решение задачи

Для решения поставленной задачи необходимо сначала определить функции  $\varphi(x, z, t)$ , являющиеся решением уравнения (11) с краевыми условиями (12)-(13). Искать ее будем в следующем виде

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} X_m Z_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда уравнения (11) и (13) переписутся следующим образом

$$X_{m,xx} Z_m + Z_{m,zz} X_m = 0, \quad X_{m,z} = 0 \quad (x = \pm 1), \quad Z_{m,z} = 0 \quad (z = -h).$$

Разделяя переменные приходим к следующему равенству

$$\frac{X_{m,xx}}{X_m} = -\frac{Z_{m,zz}}{Z_m} = -\lambda_m^2.$$

Таким образом получаем две задачи Штурма-Лиувилля для нахождения неизвестных функций  $X_m$  и  $Z_m$  с соответствующими граничными условиями

$$X_{m,xx} = -\lambda_m^2 X_m, \quad X_{m,z} = 0 \quad (X_m = \pm 1), \quad (14)$$

$$Z_{m,zz} = \lambda_m^2 Z_m, \quad Z_{m,z} = 0 \quad (Z_m = -h). \quad (15)$$

Собственные функции, являющиеся решением задачи (14), с соответствующими собственными значениями записываются следующим образом

$$X_m = C_1 \cos(\lambda_m(x+1)), \quad \lambda_m = \frac{\pi m}{2}, \quad C_1 = \text{const.}$$

Решение (15) имеет следующий вид

$$Z_m = D_m(t) \cosh(\lambda_m(z+h)).$$

Тогда  $\varphi(x, z, t)$  записывается в виде разложения в бесконечный ряд с неизвестными коэффициентами  $A_m(t)$  в следующем виде

$$\varphi(x, z, t) = \frac{A_0(t)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) \cos(\lambda_m(x+1)) \cosh(\lambda_m(z+h)), \quad \lambda_m = \frac{\pi m}{2}. \quad (16)$$

Здесь  $A_m(t) = C_1 D_m(t)$ .

Решение уравнения (9)  $w(x, t)$  ищется в виде разложения по нормальным модам колебаний упругой балки

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \psi_n(x), \quad (17)$$

где  $a_n(t)$  – коэффициенты разложения, которые требуется вычислить,  $\psi_n(x)$  – нормальные моды. Разложение (17) использовалось в [2] для определения дисперсионных соотношений гидроупругих волн, распространяющихся вдоль замороженного канала. Функции  $\psi_n(x)$  являются решением спектральной задачи

$$\psi_n^{IV} = \tilde{\lambda}_n^4 \psi_n \quad (-1 < x < 1), \quad \psi_n = \psi_{n,x} = 0 \quad (x = \pm 1). \quad (18)$$

Функции  $\psi_n(x)$  записываются в виде суммы четных и нечетных функций, которые не взаимодействуют друг с другом. Формула для четных мод имеет следующий вид

$$\psi_n^c(x) = A_n^c \left( \cos(\tilde{\lambda}_n^c x) - B_n^c \cosh(\tilde{\lambda}_n^c x) \right). \quad (19)$$

Здесь

$$B_n^c = \frac{\cos \tilde{\lambda}_n^c}{\cosh \tilde{\lambda}_n^c}, \quad (A_n^c)^2 (1 + (B_n^c)^2) = 1,$$

собственные значения  $\tilde{\lambda}_n^c$  – решения трансцендентного уравнения

$$\tan \tilde{\lambda}_n^c = -\tanh \tilde{\lambda}_n^c.$$

Можно показать, что  $\tilde{\lambda}_n^c = \pi n - \frac{\pi}{4} + \Delta_n^c$ , где  $\Delta_n^c \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Нечетные моды определяются по формулам

$$\psi_n^s(x) = A_n^s \left( \sin(\tilde{\lambda}_n^s x) - B_n^s \sinh(\tilde{\lambda}_n^s x) \right). \quad (20)$$

Здесь

$$B_n^s = \frac{\sin \tilde{\lambda}_n^s}{\sinh \tilde{\lambda}_n^s}, \quad (A_n^s)^2 (1 + (B_n^s)^2) = 1,$$

где  $\tilde{\lambda}_n^s$  удовлетворяют уравнению

$$\tan \tilde{\lambda}_n^s = \tanh \tilde{\lambda}_n^s$$

и  $\tilde{\lambda}_n^s = \pi n + \frac{\pi}{4} + \Delta_n^s$ , где  $\Delta_n^s \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Четные и нечетные решения (17) строятся независимо. В случае, когда выражение справедливо и для четных, и для нечетных мод, индексы  $s$  и  $s$  не указываются. Функции (19), (20) ортонормированы

$$\int_{-1}^1 \psi_i \psi_j dx = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j). \end{cases} \quad (21)$$

Далее изложенный метод решения справедлив как для четных, так и для нечетных мод, соответствующие индексы не пишутся. Решение для четных и нечетных мод должно строиться раздельно. Подставляя разложение по нормальным модам балки для  $w$  (17) и разложение для  $\varphi$  (16) в кинематическое условие (12), после последовательного умножения обеих сторон получившегося уравнения на  $\cos(\lambda_k(x+1))$ , интегрирования результата по  $x$  от  $-1$  до  $1$ , учитывая ортогональность (21), определяются коэффициенты  $A_k(t)$  и  $B_{nk}$

$$A_k(t) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,t} B_{nk}}{\lambda_k \sinh(\lambda_k h)}, \quad B_{nk} = \int_{-1}^1 \psi_n \cos(\lambda_k(x+1)) dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

Подставляя все в уравнение пластины (9) и интегрируя его по  $x$  от  $-1$  до  $1$ , получаем бесконечную систему дифференциальных уравнений для поиска  $a_n(t)$

$$\begin{aligned} \alpha h^2 \text{Fr}^2 a_{s,tt} + \beta a_s \tilde{\lambda}_s^4 + a_s = & \left( \beta \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{\lambda}_n^4 \int_{-1}^1 \psi_n dx + Q - \int_{-1}^1 P dx \right) B_{s0} - \\ & - h \text{Fr}^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m \tanh(\lambda_m h)} B_{sm} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,tt} B_{nm} + \int_{-1}^1 P \psi_s dx. \end{aligned} \quad (23)$$

В начальный момент времени  $t = 0$  уравнение пластины (9) имеет следующий вид

$$\beta w_{0,xxxx} + w_0 = P(x, 0), \quad (24)$$

Подставляя разложение (17) в (24) и домножая уравнение на  $\psi_m$ , после интегрирования результата по  $x$  от  $-1$  до  $1$ , учитывая (21) и (18), определяется начальное значение для уравнения (23)

$$a_m(0) = \frac{\int_{-1}^1 P(x, 0) \psi_m dx}{\beta \tilde{\lambda}_m^4 + 1}. \quad (25)$$

Продифференцируем полученное начальное условие по  $t$  и получим второе начальное условие

$$a_{m,t}(0) = 0. \quad (26)$$

В уравнении (23) бесконечные суммы по  $n$  ограничиваются числом  $N_{mod}$ , а сумма по  $m$  – числом  $N_m$ . После чего все слагаемые уравнения, содержащие  $a_{n,tt}$ , переносятся влево, а остальные – вправо

$$\begin{aligned} \alpha h^2 \text{Fr}^2 a_{s,tt} + h \text{Fr}^2 \sum_{m=1}^{N_m} \frac{1}{\lambda_m \tanh(\lambda_m h)} B_{sm} \sum_{n=1}^{N_{mod}} a_{n,tt} B_{nm} = \\ = -\beta a_s \tilde{\lambda}_s^4 - a_s + \left( \beta \sum_{n=1}^{N_{mod}} a_n \tilde{\lambda}_n^4 \int_{-1}^1 \psi_n dx + Q - \int_{-1}^1 P dx \right) B_{s0} + \int_{-1}^1 P \psi_s dx. \end{aligned} \quad (27)$$

В матричном виде уравнение (27) записывается следующим образом

$$\mathbf{K}\vec{a}_{tt} = \mathbf{R}\vec{a} + \vec{R}_0,$$

где  $\mathbf{K} = \{K_{sn}\}$ ,  $\mathbf{R} = \{R_{sn}\}$ ,  $\vec{a}_{tt} = (a_{1,tt}, a_{2,tt}, \dots, a_{N_{mod},tt})^T$ ,  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{N_{mod}})^T$ ,  $\vec{R}_0 = (R_{01}, R_{02}, \dots, R_{0N_{mod}})^T$  и

$$K_{sn} = \begin{cases} \alpha h^2 \text{Fr}^2 + h \text{Fr}^2 \sum_{m=1}^{Nm} \frac{B_{sm}^2}{\lambda_m \tanh(\lambda_m h)} & (s = n), \\ h \text{Fr}^2 \sum_{m=1}^{Nm} \frac{B_{sm} B_{nm}}{\lambda_m \tanh(\lambda_m h)} & (s \neq n), \end{cases}$$

$$R_{sn} = \begin{cases} -\beta \tilde{\lambda}_s^4 - 1 + \beta \tilde{\lambda}_s^4 B_{s0} \int_{-1}^1 \psi_s dx & (s = n), \\ \beta \tilde{\lambda}_n^4 B_{s0} \int_{-1}^1 \psi_n dx & (s \neq n), \end{cases}$$

$$R_{0s} = Q B_{s0} - B_{s0} \int_{-1}^1 P dx + \int_{-1}^1 P \psi_s dx.$$

С учетом выполненных преобразований система уравнений (27) сводится к виду

$$\vec{a}_{tt} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{R}\vec{a} + \vec{R}_0). \quad (28)$$

### 3. Численные результаты

Задача определения прогибов ледового покрова, вызванных движущейся нагрузкой, в замкнутом водоеме решается численно для льда со следующими параметрами:  $L = 10$  м,  $H = 2$  м,  $g = 9.8$  м/с<sup>2</sup>,  $E = 4.2 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho_i = 917$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_l = 1024$  кг/м<sup>3</sup>,  $h_i = 0.1$  м,  $U_0 = 1$  м/с. Ширина  $L$  и глубина  $H$  выбираются в соответствии с характеристической длиной ледового покрова  $(D/(\rho_l g))^{1/4}$ , равной 2.49 м в рассматриваемом случае. Характеристическая длина описывает единицу длины, на масштабе которой должны происходить наблюдаемые колебания ледового покрова, вызванные внешней нагрузкой. Лед зависит от множества параметров, поэтому для вычисления прогибов и деформаций в ледовом покрове использовались средние значения из диапазона данных, перечисленных в [3].

Рассматривается внешняя нагрузка (8) с коэффициентом  $c = 7.5$ , что соответствует нагрузке шириной 2.66 метра. Центр нагрузки расположен в точке  $x_1(t)$ , которая движется по закону

$$x_1(t) = x_0 + \frac{2}{3} \left( \cos \left( \pi + \frac{3}{2}t \right) + 1 \right),$$

где  $x_0$  – начальное положение нагрузки и, соответственно, безразмерная скорость движения  $U(t)$  имеет периодический вид

$$U(t) = -\sin \left( \pi + \frac{3}{2}t \right),$$

то есть рассматриваемая нагрузка периодически движется от точки  $-2/3$  до  $2/3$  и обратно. Данный закон движения также дает то, что нагрузка начинает двигаться с ускорением из состояния покоя, так как  $U(0) = 0$ . Рассматривается отрезок по времени  $[0, 2.1]$ . Для этого значения времени  $x_1(t)$  и  $U(t)$  имеют вид, показанный на Рисунке 1. На данном этапе рассматриваемая нагрузка не совершает полный круг, а преодолевает расстояние от

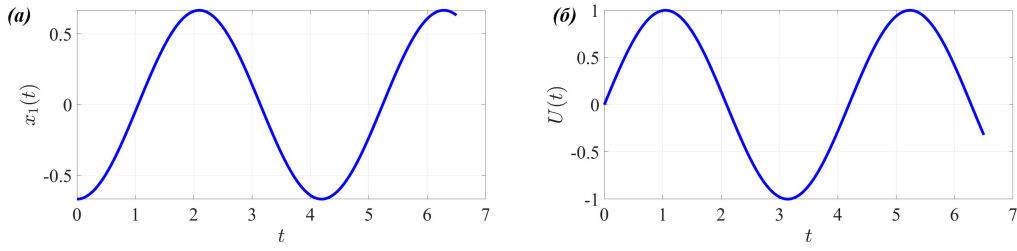


Рисунок 1. Безразмерная координата центра нагрузки  $x_1(t)$  (а) и безразмерная скорость нагрузки  $U(t)$  (б) как функции безразмерного времени  $t$ .

одного конца водоема до другого. Для того, чтобы нагрузка вернулась в исходное положение необходимо рассмотреть отрезок времени  $[0, 4.2]$ , нагрузка возвращается в исходное положение за  $t \approx 4.18$ , что для рассматриваемых масштабов равно  $\approx 41.8$  с.

Система (28) состоит из  $N_{mod}$  уравнений. Левая ее часть записывается в виде  $\frac{da_{n,t}}{dt}$  и полученная система дополняется еще таким же количеством уравнений вида  $\frac{da_n}{dt} = a_{n,t}$ . В итоге получается система из  $2 N_{mod}$  уравнений

$$\begin{cases} \frac{da_{n,t}}{dt} = f_n(t, a_n), & n = 1 \dots N_{mod}, \\ \frac{da_n}{dt} = a_{n,t}, & n = 1 \dots N_{mod}, \end{cases}$$

которая решается методом Рунге-Кутты 4-го порядка точности с начальными условиями для  $a_n$  и  $a_{n,t}$  в виде (25) и (26) соответственно. Функции  $f_n$  определяются из правой части матрицы (28). Вычисления проводились в среде Matlab, которая использовалась как язык программирования. Точность вычисления  $a_n$  зависит, в первую очередь, от шага по времени  $\Delta t$  и количества мод  $N_{mod}$ . Получено, что для рассмотренного диапазона  $N_{mod}$  численное решение сходится при  $\Delta t$  от  $10^{-4}$  до  $10^{-5}$ . Сходимость численного решения проверялась дальнейшим уменьшением шага. Более большой шаг может привести к расхождению численного решения.

Перейдем к анализу прогибов и удлинений. В начальный момент времени безразмерные прогибы и деформации имеют вид, показанный на Рисунке 2. Прогибы льда сосредоточены под нагрузкой. Максимальные деформации достигаются на левой стенке в силу близости к ней нагрузки. Так как рассматривается замкнутый водоем, то считается, что объем жидкости в нем постоянен и учитывает начальное распределение прогибов льда.

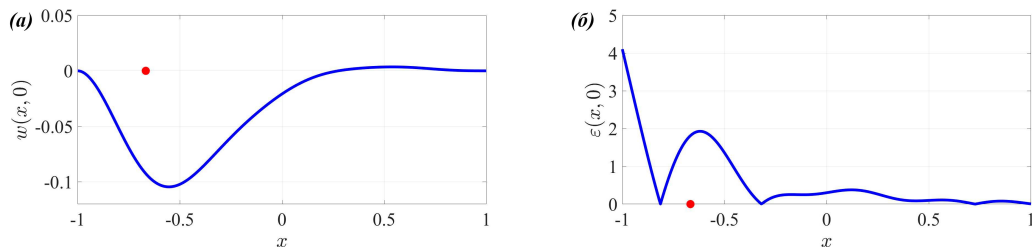


Рисунок 2. Безразмерные прогибы (а) и безразмерные деформации (б) в ледовом покрове в начальный момент времени. Красным маркером отмечена координата центра внешней нагрузки  $x_1(t)$ .

Рассмотрим начальный этап движения, когда нагрузка начинается двигаться от левого края в сторону правого. Безразмерные прогибы показаны на Рисунке 3 при разных временах. Положение внешней нагрузки показано через координату центра внешней нагрузки



$x_1(t)$ , отмеченной красным маркером. На всех графиках нагрузка движется слева направо. Первые три графика (а-в) показаны для нагрузки, находящейся до центра водоема, последний график – нагрузка уже находится в правой части водоема. Видно смещение максимальной амплитуды прогибов вслед за движением нагрузки. Перед нагрузкой возникают колебания льда с наибольшим возвышением перед/над нагрузкой в зависимости от времени. Колебания перед нагрузкой имеют волновую форму. Форма прогибов для начального движения очень хорошо согласуется для формы прогибов при начальном движении нагрузки по неограниченному ледовому покрову (см. [4]).

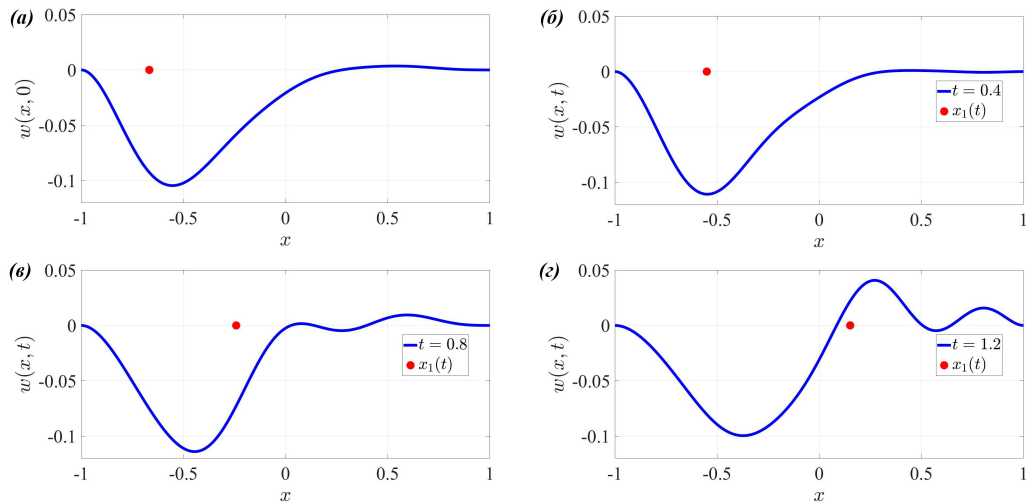


Рисунок 3. Безразмерные прогибы в момент времени  $t = 0$  (а),  $t = 0.4$  (б),  $t = 0.8$  (в) и  $t = 1.2$  (г). Красным маркером отмечена координата центра внешней нагрузки  $x_1(t)$  в текущий момент времени. Нагрузка движется слева направо.

Соответствующие начальному этапу движения безразмерные деформации показаны на Рисунке 4 при разных временах. Положение внешней нагрузки показано через координату центра внешней нагрузки  $x_1(t)$ , отмеченной красным маркером. Пока нагрузка находится на левой стороне водоема, максимальные деформации находятся на левой стенке. При отдалении нагрузки от левой стенки, деформации на ней уменьшаются. При этом увеличиваются деформации спереди и сзади нагрузки на небольшом расстоянии от нее. После того, как нагрузка оказывается на правой части водоема, максимальными будут деформации на правой стенке. На всех показанных Рисунках максимальные деформации будут в начальный момент времени на левой стенке. Для нахождения точки, в которой лед может сломаться, необходимо рассмотреть критическое значение размерных относительных деформаций  $8 \cdot 10^{-5}$ , см. [5]. Распределение деформаций будет отличаться от случая с неограниченным ледовым покровом, так как там отсутствуют жесткие стенки, поэтому максимальные деформации достигаются под нагрузкой в большинстве случаев, см. [6]. Дальнейшее распределение прогибов и удлинений сильно зависит от времени и положения нагрузки относительно границ водоема.

#### 4. Заключение

Рассмотрена нестационарная задача о движении внешней нагрузки в замкнутом водоеме. Задача решена в двумерной постановке в рамках линейной теории гидроупругости. Для этой теории постановка задачи имеет классический вид: есть упругая часть задачи, описывающая поведение льда, и есть гидродинамическая часть задачи, описывающая динамику идеальной несжимаемой жидкости. Обе части задачи связаны друг с другом. Задача дополняется краевым условием на поток жидкости в силу ограниченности водоема,



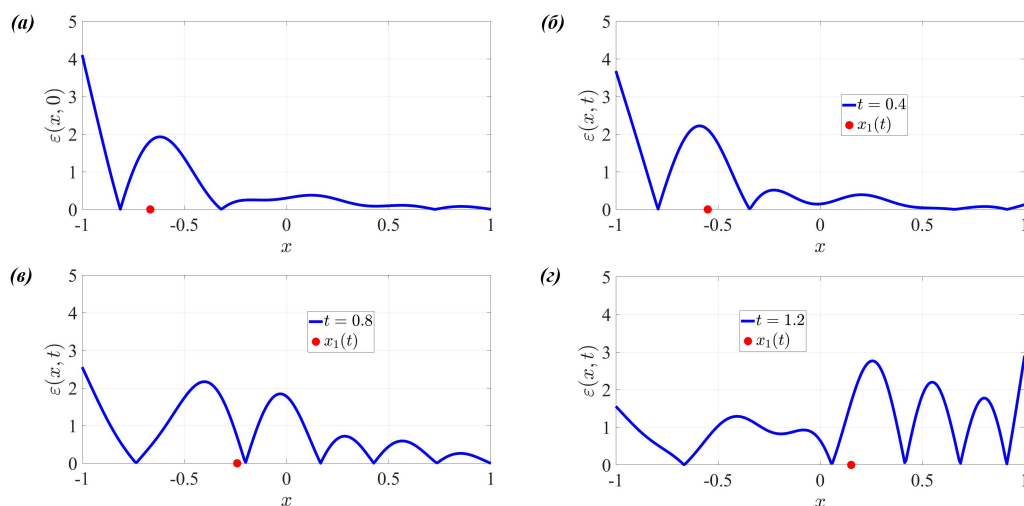


Рисунок 4. Безразмерные деформации в ледовом покрове в момент времени  $t = 0$  (а),  $t = 0.4$  (б),  $t = 0.8$  (в) и  $t = 1.2$  (г). Красным маркером отмечена координата центра внешней нагрузки  $x_1(t)$  в текущий момент времени. Нагрузка движется слева направо.

это условие переписывается в виде интегрального условия для прогибов льда на границе лед-жидкость. Задача решена введением нормальных мод колебаний упругой балки. Исследован случай льда, примороженного к стенкам водоема, что моделировалось условиями жесткого заземления. В итоге решение для потенциала скорости течения жидкости выражается через решение для прогибов льда. Рассмотрен случай циклического движения внешней нагрузки от левого края к правому и обратно. Задача сведена к системе ОДУ второго порядка и решена методом Рунге-Кутты.

При всех рассмотренных временах наибольший вклад имеет первая четная и первая нечетная мода. Далее с наибольшим вкладом идет вторая четная и вторая нечетная мода. Вклады третьей и четвертой четных и нечетных мод могут сильно меняться в зависимости от расположения нагрузки. В начальном этапе движения, когда нагрузка начинается двигаться от левого края в сторону правого, видно смещение максимальной амплитуды прогибов вслед за движением нагрузки. Перед нагрузкой возникают колебания льда с наибольшим возвышением перед/над нагрузкой в зависимости от времени. Колебания перед нагрузкой имеют волновую форму. Форма прогибов для начального движения очень хорошо согласуется с формой прогибов при начальном движении нагрузки по неограниченному ледовому покрову. Дальнейшее распределение прогибов и удлинений сильно зависит от времени и положения нагрузки относительно границ водоема.

## Список литературы

1. Kozin V.M., Zhestkaya V.D., Pogorelova A.V. et al. Applied Problems of the Dynamics of Ice Cover. — Moscow, 2008.
2. Korobkin A., Khabakhpasheva T., Papin A. Waves Propagating Along a Channel with Ice Cover // European Journal of Mechanics B/Fluids. — 2024. — Vol. 47. — P. 166–175.
3. Squire V., Hosking R., Kerr A., Langhorne P. Moving Loads on Ice. — 1996.
4. Zhestkaya V.D. Numerical Solution of the Problem of an Ice Sheet Under a Moving Load // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 1999. — Vol. 40(4). — P. 770–775.

- 
5. Шишмарев К.А. Поведение ледового покрова канала под действием движущейся внешней нагрузки : Дисс... канд. физ.-мат. наук / Шишмарев К.А. — Новосибирск, 2019.
  6. Kozin V.M. Resonance Method of Breaking of Ice Cover. Inventions and Experiments. — Moscow, 2007.