УДК 514.765

О потоке Риччи на трехмерных унимодулярных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой

Григорьев Д.С., Гринкевич А.В., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
Московский физико-технический институт, г. Москва
danila.grigoryev.2019@mail.ru, grinkevich.av97@gmail.com, oskorbin@yandex.ru, edr2002@mail.ru

Аннотация

В рамках данного исследования рассматривается поведение потока Риччи на трехмерных унимодулярных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и связностью Леви-Чивиты. В координатах Дж. Милнора исхдоное уравнение потока Риччи преобразуется в систему дифференциальных уравнений. Получены частные решения для одного из четырех возможны типов псевдоортобазиса в алгебрах Ли.

Ключевые слова: Поток Риччи, трехмерные унимодулярные группы Ли, связность Леви-Чивиты, лоренцева метрика

1. Введение

В данной работе симметрические потоки Риччи определяются на трехмерных унимодулярных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и связностью Леви-Чивиты. Пусть M – (псевдо)риманово многообразие размерности n с метрическим тензором $g(X, Y)$ и связностью Леви-Чивиты ∇g. Рассмотрим на M однопараметрическое семейство римановых метрик $g(t)$ и запишем уравнение потока Риччи

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -Ric(g(t)). \tag{1}$$

Уравнение (1) впервые исследовалось Р. Гамильтоном в римановом случае для связности Леви-Чивиты [1]. Известно, что тензор Риччи в (псевдо)римановом случае, вообще говоря, не является симметрическим. Поэтому естественным является рассмотрение симметрической части тензора Риччи и симметрического потока Риччи вида

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -Sym(Ric(g(t))). \tag{2}$$

Рассмотрим далее случай, когда G – трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и связностью Леви-Чивиты. Тогда в алгебре Ли группы G существует псевдоортобазис E_1, E_2, E_3, называемый базисом Дж. Милнора [2,3], в котором удобно проводить вычисления. Всего возможны четыре типа подобных базисов: $A_1 - A_4$. Более подробно:

Теорема 1. *Пусть G – трехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. Тогда если G унимодулярная, то в алгебре Ли группы G существует псевдоортонормированный базис $E1, E2, E3$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G содержится в следующем списке:*

1. *случай* A_1*:*
$$[E_1, E_2] = \alpha_3 E_3, [E_1, E_3] =?\alpha_2 E_2, [E_2, E_3] = \alpha_1 E_1$$
с временипободным $E1$*;*

2. *случай* A_2*:*
$$[E_1, E_2] = (1?\alpha_2)E_3 - E_2, [E_1, E_3] = E_3 - (1 + \alpha_2)E_2, [E_2, E_3] = \alpha_1 E_1$$
с временипободным E_3*;*

3. *случай* A_3*:*
$$[E_1, E_2] = E_1 - \alpha_1 E_3, [E_1, E_3] = -\alpha_1 E_2 - E_1, [E_2, E_3] = \alpha_1 E_1 + E_2 + E_3$$
с временипободным E_3*;*

4. *случай* A_4*:*
$$[E_1, E_2] = \alpha_3 E_2, [E_1, E_3] = -\alpha_2 E_1 - \alpha_1 E_2, [E_2, E_3] = -\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2$$
с временипободным E_1 *и* $\alpha_2 \neq 0$*.*

Рассмотрим на G семейство левоинвариантных лоренцевых метрик Дж. Милнора.
$$g =?A(\theta^1)^2 + B(\theta^2)^2 + C(\theta^3)^2,$$
где θ^i – кобазис к базису Дж. Милнора E_i, метрика невырождена. Тогда уравнение симметрического потока Риччи для случая A_1 примет вид:
$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = -\dfrac{(\alpha_1 A - \alpha_2 B + \alpha_3 C)(\alpha_1 A + \alpha_2 B - \alpha_3 C)}{2BC}, \\ \dfrac{dB}{dt} = -\dfrac{(\alpha_1 A - \alpha_2 B - \alpha_3 C)(\alpha_1 A + \alpha_2 B - \alpha_3 C)}{2AC}, \\ \dfrac{dC}{dt} = -\dfrac{(\alpha_1 A - \alpha_2 B - \alpha_3 C)(\alpha_1 A - \alpha_2 B + \alpha_3 C)}{2AB}. \end{cases} \tag{3}$$

Для упрощения системы введем линейную замену переменных. Предположим, что $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \neq 0$:
$$u = A\alpha_1 - B\alpha_2 + C\alpha_3, \quad v = A\alpha_1 + B\alpha_2 - C\alpha_3, \quad w = A\alpha_1 - B\alpha_2 - C\alpha_3.$$

Обращение преобразования (при $\alpha_i \neq 0$):
$$2\alpha_1 A = u + v, \quad 2\alpha_2 B = v - w, \quad 2\alpha_3 C = u - w.$$

В новых переменных система (3) принимает вид:
$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = -\dfrac{uv}{2BC}, \\ \dfrac{dB}{dt} = \dfrac{wv}{2AC}, \\ \dfrac{dC}{dt} = \dfrac{wu}{2AB}. \end{cases}$$

Производные произведений метрических коэффициентов

Вычислим производные попарных произведений, используя правила дифференцирования произведения и тождества $u+v=2\alpha_1 A$, $v-w=2\alpha_2 B$, $u-w=2\alpha_3 C$.

1. Производная $\frac{d}{dt}(BC)$:

$$\frac{d}{dt}(BC)=\frac{dB}{dt}C+B\frac{dC}{dt}=\left(\frac{wv}{2AC}\right)C+B\left(\frac{wu}{2AB}\right)=\frac{w}{2A}(v+u)=\frac{w}{2A}(2\alpha_1 A)=\alpha_1 w.$$

2. Производная $\frac{d}{dt}(AB)$:

$$\frac{d}{dt}(AB)=\frac{dA}{dt}B+A\frac{dB}{dt}=\left(-\frac{uv}{2BC}\right)B+A\left(\frac{wv}{2AC}\right)=\frac{v}{2C}(-u+w).$$

Так как $-u+w=-(u-w)=-2\alpha_3 C$:

$$\frac{d}{dt}(AB)=\frac{v}{2C}(-2\alpha_3 C)=-\alpha_3 v.$$

3. Производная $\frac{d}{dt}(AC)$:

$$\frac{d}{dt}(AC)=\frac{dA}{dt}C+A\frac{dC}{dt}=\left(-\frac{uv}{2BC}\right)C+A\left(\frac{wu}{2AB}\right)=\frac{u}{2B}(-v+w).$$

Так как $-v+w=-(v-w)=-2\alpha_2 B$:

$$\frac{d}{dt}(AC)=\frac{u}{2B}(-2\alpha_2 B)=-\alpha_2 u.$$

Производная произведения ABC:

$$\frac{d}{dt}(ABC)=\frac{1}{2}(vw+uw-uv).$$

Дифференциальные законы сохранения

Рассмотрим линейную комбинацию производных $\frac{d}{dt}(AB)$ и $\frac{d}{dt}(AC)$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{AB}{\alpha_3}+\frac{AC}{\alpha_2}\right)=\frac{1}{\alpha_3}(-\alpha_3 v)+\frac{1}{\alpha_2}(-\alpha_2 u)=-(u+v)=-2\alpha_1 A.$$

Умножая на $\alpha_2\alpha_3$ (при $\alpha_i\neq 0$), получаем дифференциальный закон сохранения для A:

$$\frac{d}{dt}\left[A(\alpha_2 B+\alpha_3 C)\right]=-2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 A. \tag{4}$$

Циклические перестановки индексов дают законы для B и C:

$$\frac{d}{dt}\left[B(\alpha_1 A+\alpha_3 C)\right]=-2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 B. \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}\left[C(\alpha_1 A+\alpha_2 B)\right]=-2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 C. \tag{6}$$

Частные решения при $\alpha_i=0$

Случай $\alpha_1=0,\alpha_2=0$

Законы сохранения: $BC=\varphi_0$ и $AC=\psi_0$. Подстановка в $\dfrac{dC}{dt}$ дает:

$$\frac{dC}{dt}=-\frac{\alpha_3^2 C^4}{2\psi_0\varphi_0}.$$

Интегрирование $\int C^{-4}dC = \int -\frac{\alpha_3^2}{2\psi_0\varphi_0}dt$ приводит к решению:

$$C^3(t) = \left(\frac{1}{C_0^3} + \frac{3\alpha_3^2}{2\psi_0\varphi_0}t\right)^{-1}.$$

Случай $\alpha_1 = 0, \alpha_3 = 0$

Законы сохранения: $BC = \varphi_0$ и $AB = \psi_0$. Решение для $B(t)$:

$$B(t) = \left(\frac{1}{B_0^3} + \frac{3\alpha_2^2}{2\psi_0\varphi_0}t\right)^{-1/3}.$$

Случай $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$

Законы сохранения: $AC = \varphi_0$ и $AB = \psi_0$. Дифференциальное уравнение $\dfrac{dA}{dt} = -\frac{\alpha_1^2}{2\varphi_0\psi_0}A^4$. Решение для $A(t)$:

$$A(t) = \left(\frac{1}{A_0^3} + \frac{3\alpha_1^2}{2\varphi_0\psi_0}t\right)^{-1/3}.$$

Анализ случая $\alpha_1 = 0$ и замена ρ

При $\alpha_1 = 0$: $BC = \varphi_0$ и $A(\alpha_2 B + \alpha_3 C) = \psi_0$. Вводим $\rho = C/B$. Используя $B^2 = \varphi_0/\rho$, $A = \frac{\psi_0\sqrt{\rho/\varphi_0}}{\alpha_2+\alpha_3\rho}$. Вычисление $\frac{d\rho}{dt}$:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{B^2}\left(\frac{dC}{dt}B - C\frac{dB}{dt}\right).$$

После подстановки и упрощения, корректное дифференциальное уравнение для ρ имеет вид:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\sqrt{\varphi_0}}{\psi_0}\frac{(\alpha_2 - \alpha_3\rho)(\alpha_2 + \alpha_3\rho)^2}{\sqrt{\rho}}. \tag{7}$$

Стационарные точки $\frac{d\rho}{dt} = 0$:

$$\rho = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}, \quad \text{и} \quad \rho = -\frac{\alpha_2}{\alpha_3} \quad \text{(корень кратности 2)}.$$

Частное решение $B(t)$ (только для стационарных $\rho = \rho_0$):

$$B(t) = B_0\sqrt{\frac{\alpha_2 - \alpha_3\rho_0}{\alpha_2 + \alpha_3\rho_0}}.$$

2. Заключение

В работе исследован поток Риччи на трехмерных группах Ли с лоренцевой метрикой и связностью Леви-Чивита, а также рассмотрен случай A_1. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Список литературы

1. Hamilton R.S. Three-manifolds with positive Ricci curvature // J. Differential Geom. — 1982. — Vol. 17, no. 2. — P. 255–306.

2. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. — 1976. — Vol. 21. — P. 293–329.

3. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Уравнение Эйнштейна на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых пространствах с векторным кручением // Математические заметки СВФУ. — 2021. — Т. 28, № 4. — С. 30–47.

4. Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie) // Ann. Ecole Norm. Sup. — 1925. — Vol. 42. — P. 17–88.

5. Onda K. Ricci Flow on 3-dimensional Lie groups and 4-dimensional Ricci-flat manifolds. — 2010.

6. Knopf D., McLeod K. Quasi-Convergence of Model Geometries Under the Ricci Flow // Communications in analysis and geometry. — 2001. — Vol. 9, no. 4. — P. 879–919.