

О построении диаграммы Бляшке при деформациях правильных треугольных пирамид

Оглезнев Д.И., Пономарев И.В.

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

ogleznev_96@mail.ru, igorpon@mail.ru

Аннотация

Статья посвящена исследованию траектории изменения образов треугольных пирамид, подверженных деформации. Для построения данных траекторий были использованы изопериметрические неравенства, связывающие характеристики выпуклых тел, и возможности математического пакета прикладных программ.

Ключевые слова: Диаграмма Бляшке, изопериметрические неравенства, выпуклый анализ, треугольная пирамида

Пусть P_3 – правильная треугольная пирамида со стороной основания длинны a и высоты H .

На рисунке 1 представлено изображение правильной треугольной пирамиды с основанием ABC . Ось Ox проходит по высоте AE основания пирамиды. Ось Oz проходит по высоте пирамиды OD .

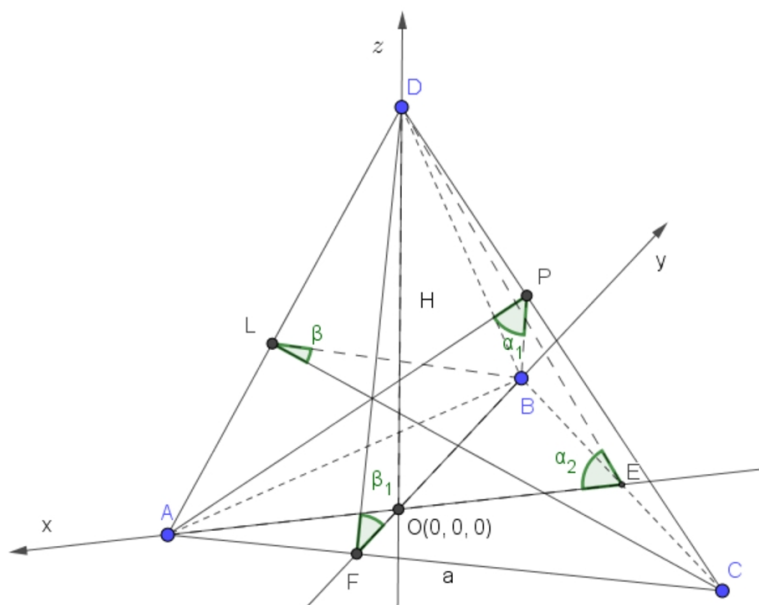


Рисунок 1. Правильная треугольная пирамида в прямоугольной системе координат

Проекцией вершины $D(0; 0; H)$ на прямую AE является начало координат $O(0; 0; 0)$. Вершине A соответствуют координаты $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}; 0; 0\right)$, вершине B соответствуют координаты $\left(0; \frac{a}{\sqrt{2}}; 0\right)$, длина высоты $AE = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Характеристики тела P_3 , необходимые для отображения точки на диаграмме Бляшке, можно вычислить по следующим формулам

$$V(P_3) = \frac{1}{3}S_1H,$$

$$S(P_3) = S_1 + S_2 + S_3,$$

$$M(P_3) = \frac{1}{2} ((\pi - \alpha_1)BD + 2(\pi - \beta)AD + (\pi - \beta_1)a + 2(\pi - \alpha_2)a),$$

где S_1 – площадь основания ABC пирамиды P_3 ; S_2 – сумма площадей боковых граней ADB , DCB ; S_3 – площадь боковой грани ADC ; α_1 – угол между гранями ADB и CDB ; β – угол между гранями ADB и ADC и гранями ADC и CDB ; β_1 – угол между гранями ADC и ABC ; α_2 – угол между гранями ABC и ADB и гранями ABC и CDB .

Формулы для вычисления длин боковых ребер BD и AD , площадей S_1 , S_2 , S_3 , двугранных углов α_1 , α_2 , β_1 , β были запрограммированы в математическом пакете MatLab. Согласно работе Бляшке [1], каждой пирамиде P_3 сопоставляется точка на плоскости с координатами

$$x = \frac{4\pi S}{M^2}, \quad y = \frac{48\pi^2 V}{M^3}.$$

Подвергнем пирамиду P_3 деформации, т.е. начнем перемещать вершину D вдоль оси Oy . В результате этого получим траекторию движения образа P_3 на диаграмме Бляшке.

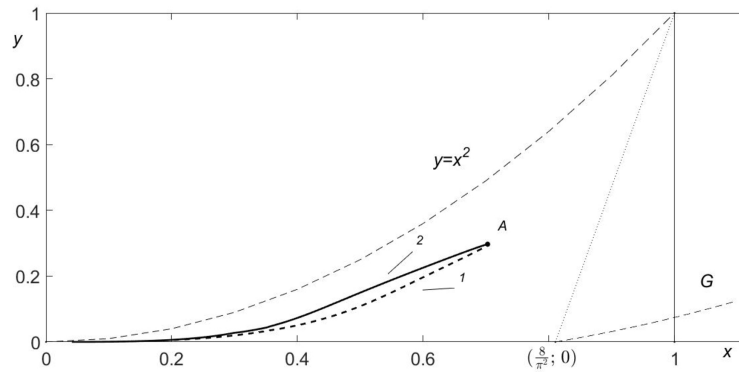


Рисунок 2. Диаграмма Бляшке множества треугольных пирамид

На рисунке 2 изображена диаграмма Бляшке множества треугольных пирамид с длиной основания $a = 3$, высоты $H = 5$. Пунктирной линией 1 изображен образ пирамид для которых координата $y \in (0; 100]$ для вершины D . Сплошной линией 2 изображено отображение пирамид для которых координата $y \in [-100; 0)$. Точке A соответствует образ пирамиды, для которой координата $y = 0$ (исходная пирамида P_3).

Список литературы

1. Blaschke W. Eine Frage über konvexe Körper, Jahresber // Deutsch, Math-Verein. — 1916. — Vol. 25. — P. 121–125.
2. Бутовский М.М. Расчет интегралов поперечных мер Минковского, сумм Минковского и построение диаграммы Бляшке для выпуклых многогранников в Евклидовом пространстве // Конструирование и оптимизация параллельных программ. — Новосибирск, 2009. — С. 21–32.
3. Васин Д.В. Диаграмма Бляшке множества выпуклых тел // Вестник БГПУ: Естественные и точные науки. — 2002. — № 2. — С. 5–9.