УДК 514.765

О вычислении главных значений кривизны на трехмерных метрических неунимодулярных группах Ли

Родионов Е.Д., Старцев В.С.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
edr2002@mail.ru, vita1moon@yandex.ru

Аннотация

В данной статье исследуются главные значения кривизны на трехмерных неунимодулярных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

Ключевые слова: Трехмерные неунимодулярные группы Ли, левоинвариантные римановы метрики, главные значения кривизны

1. Введение

Исследованию связи между различными типами кривизн и топологией римановых многообразий посвящены работы многих математиков [1–4]. В [2–4] изучалось влияние кривизны Риччи и одномерной кривизны на топологию однородных римановых многообразий.

Пусть G – трехмерная неунимодулярная группа Ли. Тогда в g существует положительно ориентированный ортобазис e_1, e_2, e_3 такой, что [3]:

$$\begin{array}{rcl} [e_1, e_2] &=& \alpha e_2 + \beta e_3, \\ [e_1, e_3] &=& \gamma e2 + \delta e_3, \\ [e_2, e_3] &=& 0, \end{array} \tag{1}$$

где $\alpha + \delta \neq 0$ и $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$. Заметим, что в случае $\alpha + \delta = 2$ инвариант $D = \alpha\delta - \gamma\beta$ определяет алгебру g с точностью до изоморфизма. Следуя [3], положим:

$$\begin{array}{rcl} \alpha &=& 1+\xi, \\ \beta &=& (1+\xi)\eta, \\ \gamma &=& -(1-\xi)\eta, \\ \delta &=& 1-\xi, \end{array} \tag{2}$$

где $\xi \geq 0, \eta \geq 0$.

Тогда квадратичные формы Риччи и одномерной кривизны диагонализируемы в этом базисе, и их главные кривизны и след вычисляются по формулам:

$$\begin{array}{rcl} r(e_1) &=& -2\eta^2\xi^2 - 2\xi^2 - 2 < 0, \\ r(e_2) &=& -2\eta^2\xi - 2\xi - 2 < 0, \\ r(e_3) &=& 2\eta^2\xi + 2\xi - 2. \end{array} \tag{3}$$

$$\rho = -2\eta^2\xi^2 - 2\xi^2 - 6 < 0, \quad (\xi \geq 0, \eta \geq 0). \tag{4}$$

$$\begin{array}{rcl} k_1 &=& -\frac{3}{2}\eta^2\xi^2 - \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{1}{2} < 0, \\ k_2 &=& \frac{1}{2}\eta^2\xi^2 + \frac{1}{2}\xi^2 - 2\eta^2\xi - 2\xi - \frac{1}{2}, \\ k_3 &=& \frac{1}{2}\eta^2\xi^2 + \frac{1}{2}\xi^2 + 2\eta^2\xi + 2\xi - \frac{1}{2}. \end{array} \tag{5}$$

Кроме того, для секционной кривизны имеем:

$$\begin{array}{rcl} \sigma_{23} & = & \eta^2\xi^2 + \xi^2 - 1, \\ \sigma_{31} & = & -\eta^2\xi^2 - \xi^2 - 2\eta^2\xi - 2\xi - 1, \\ \sigma_{12} & = & -\eta^2\xi^2 - \xi^2 + 2\eta^2\xi + 2\xi - 1. \end{array} \tag{6}$$

2. Программы в среде SageMath для вычисления главных кривизн

Для нахождения значений главных кривизн было использован математический пакет SageMath. Он использует интерактивный блокнот Jupiter Notebook. Структуру этого блокнота можно разделить на блоки для написания кода и написания текста. Причём, Jupiter Notebook поддерживает язык разметки Markdown, что позволяет разделить текстовые блоки и блоки с кодом на иерархии: одни блоки можно вложить в другие. Для написания кода SageMath использует языке программирования Python, что позволяет использовать различные пакеты, выводить графики функий, и выполнять различные арифметические, алгебраические вычисления и другие вычисления, связанные с математическим анализом, дифференциальными уравнениями, и так далее.

Далее будет представлен код, который вычисляет значения главных кривизн.

Код программы

```
alpha, gamma, beta, delta = var("alpha, gamma, beta, delta")
xi, eta = var("xi, eta")

n = 3 # Размерность
# Замена переменных alpha, gamma, beta, delta на xi, eta (xi, eta >= 0)
alpha = 1 + xi
beta = (1 + xi)*eta
gamma = -(1 - xi)*eta
delta = 1 - xi

# Инициализация матрицы структурных констант C_ij_k
C_11_1, C_12_1, C_13_1 = 0, 0, 0
C_21_1, C_22_1, C_23_1 = 0, 0, 0
C_31_1, C_32_1, C_33_1 = 0, 0, 0

C_11_2, C_12_2, C_13_2 = 0,  alpha,  gamma
C_21_2, C_22_2, C_23_2 = -1*alpha,  0, 0
C_31_2, C_32_2, C_33_2 = -1*gamma,  0, 0

C_11_3, C_12_3, C_13_3 = 0, beta, delta
C_21_3, C_22_3, C_23_3 = -1*beta, 0, 0
C_31_3, C_32_3, C_33_3 = -1*delta, 0, 0

# Справка по вызову: C_ij_k => C[k][i][j]
C = [[[C_11_1, C_12_1, C_13_1], [C_21_1, C_22_1, C_23_1],
      [C_31_1, C_32_1, C_33_1]], [[C_11_2, C_12_2, C_13_2],
      [C_21_2, C_22_2, C_23_2], [C_31_2, C_32_2, C_33_2]],
     [[C_11_3, C_12_3, C_13_3], [C_21_3, C_22_3, C_23_3],
      [C_31_3, C_32_3, C_33_3]]]
```

```
# Метрический тензор
g = Matrix([[int(i == j) for i in range(3)] for j in range(3)])

# Обратная матрица Метрического тензора
G = g.inverse()

# Символы Кристоффеля Г_ij^k
def Gamma_calc(i,j,k):
    return (C[k][i][j] + C[j][k][i] + C[i][k][j])/2

# Элементы Тензора кривизны Римана R_ijkt
def R_calc(i, j, k, t):
    a = sum([C[s][i][j]*Gamma_calc(s, k, t) for s in range(3)])
    b = sum([Gamma_calc(j, k, l)*Gamma_calc(i, l, t) for l in range(3)])
    c = sum([Gamma_calc(i, k, m)*Gamma_calc(j, m, t) for m in range(3)])
    return a - b + c

# Элементы Тензора кривизны Риччи
def r_calc(i,k):
    A = 0
    for j in range(3):
        for t in range(3):
         A += R_calc(i, j, k, t)*G[j,t]
    return A

# Матрица Тензора кривинзы Риччи
r_ij = [[r_calc(i,j).simplify_full() for j in range(3)] for i in range(3)]

# Скалярная кривизна
rho = r_ij[0][0] + r_ij[1][1] + r_ij[2][2]

# Элементы Тензора одномерной кривизны
def A_calc(i, k): return r_ij[i][k] - (rho*g[i][k])/(2*(n - 1))

# Матрица Тензора одномерной кривизны
A_ij = [[((1/(n - 2))*A_calc(i, k)).simplify() for k in range(n)] for i in range(n)]

# Матрица Тензора двумерной секционной кривизны
K_ij = [[0, rho/2 - r_ij[2][2], rho/2 - r_ij[1][1]],
        [rho/2 - r_ij[2][2], 0, rho/2 - r_ij[0][0]],
        [rho/2 - r_ij[1][1], rho/2 - r_ij[0][0], ]]


#---------------------Вызов вычислений----------------------------
print("#---------------------------------------------------------#")
print("\n---(Главные компоненты Тензора кривизны Риччи)---")
show("r(e1) = ", r_ij[0][0])
show("r(e2) = ", r_ij[1][1])
show("r(e3) = ", r_ij[2][2])
```

```
print("\n------(Скалярная кривизна)---")
show("rho = ", rho)
print("#-------------------------------------------------------#")


print("\n\n#-------------------------------------------------------#")
print("\n---(Главные компоненты Тензора одномерной кривизны)---")
show("K1 = ", A_ij[0][0])
show("K2 = ", A_ij[1][1])
show("K2 = ", A_ij[2][2])
print("#-------------------------------------------------------#")


print("\n---(Главные компоненты Тензора двумерной кривизны)---")
show("sigma_{12} = ", K_ij[0][1])
show("sigma_{23} = ", K_ij[2][1])
show("sigma_{31} = ", K_ij[0][2])
print("#-------------------------------------------------------#")
```

3. График скалярной кривизны средствами 3D

Для изображения графика функции скалярной кривизны (4) использовался тот же математический пакет SageMath. График рисовался для $\xi \in [0, 3], \eta \in [0, 3]$.

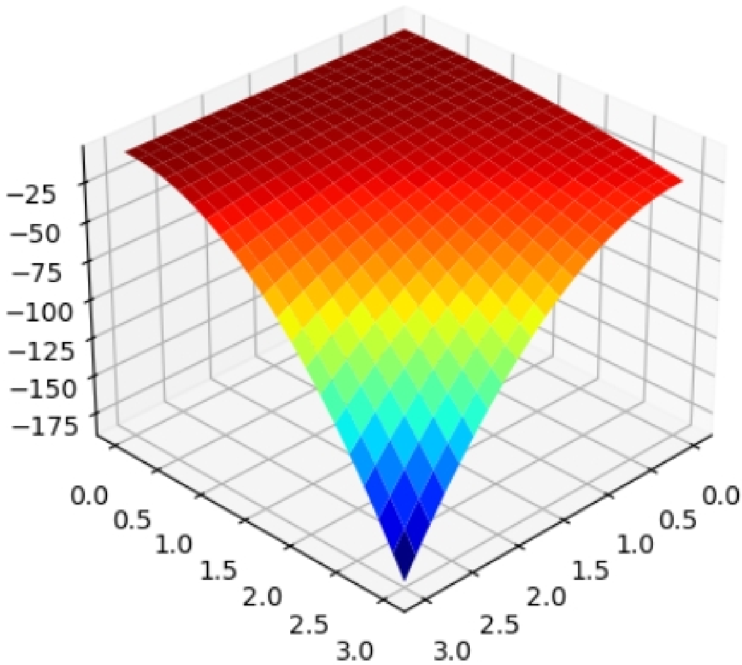

Рисунок 1. График функции скалярной кривизны

Замечание 1. *Графики других функций главных кривизн можно построить аналогично с помощью 3D.*

Замечание 2. *Применяя стандартные методы из курса математического анализа, нетрудно исследовать графики функций главных кривизн.*

Список литературы

1. Бессе А. Многообразия Эйнштейна: в 2 т.: пер. с англ. — М., 1990.

2. Berestovsky V.N. Homogenious Riemannian manifolds of positive Ricci curvature // Mat. Zametki. — 1995. — Vol. 55, no. 3.

3. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. — 1976. — Vol. 21.

4. Rodionov E.D., Slavsky V.V. Conformal deformation of the Riemannian metrics and homogenious Riemannian spaces // Comm. Math. Univ. Carolinae. — 2002. — Vol. 43, no. 2.