УДК 514.764.227

О системе дифференциальных уравнений для определения конформно киллинговых векторных полей на пространстве Минковского

Гнедко М.Е., Родионов Е.Д.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
gnedko98@mail.ru, edr2002@mail.com

Аннотация

Исследованию киллинговых и конформно киллинговых векторных полей на лоренцевых многообразиях посвящены работы многих математиков. В работах Д.Н. Оскорбина и Е.Д. Родионова изучались данные типы полей, а также их связь с солитонами Риччи в случае k-симметрических лоренцевых многообразий. В данной статье исследуются конформно киллинговы векторные поля на пространстве Минковского.

Ключевые слова: Пространство Минковского, пространство Де Ситтера, конформно киллинговы векторные поля, лоренцевы многообразия, k-симметрические пространства, тензор Вейля

1. Введение

Пространство Минковского – это четырёхмерное псевдоевклидово пространство-время, являющееся математическим фундаментом специальной теории относительности Эйнштейна. Пространство Минковского $\mathbb{M}^{1,3}$ есть гладкое многообразие, гомеоморфное $\mathbb{R}^4$, наделенное лоренцевой метрикой постоянной кривизны. Метрику пространства можно задать следующей квадратичной формой:

$$g = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2, \tag{1}$$

где ct – временная координата, нормированная скоростью света c, а x, y, z – пространственные координаты. Данная метрика имеет сигнатуру $(+,-,-,-)$.

С математической точки зрения, пространство Минковского представляет собой наиболее простое нетривиальное решение уравнений Эйнштейна в вакууме при нулевой космологической постоянной – плоское лоренцево многообразие. Далее мы рассмотрим случай пространства Минковского $\mathbb{M}^{1,n-1}$. Данные пространства содержатся в более широком классе k-симметрических пространств. Дадим необходимые определения.

Псевдоримановым многообразием называется гладкое многообразие M размерности n, на котором задан гладкий невырожденный симметричный метрический тензор g. Если метрический тензор имеет сигнатуру $(1, n-1)$, то (M, g) называется лоренцевым многообразием.

Псевдориманово многообразие (M, g) называется симметрическим порядка k или k-симметрическим, если $\nabla^k R = 0$, $\nabla^{k-1} R \neq 0$, где $k \geq 1$ и R – тензор кривизны (M, g), а ∇ – связность Леви-Чивиты.

Псевдоримановы симметрические пространства порядка k, где $k \geq 2$, возникают в исследованиях по псевдоримановой геометрии и в физике. В настоящее время они исследованы в случаях $k = 2(3)$ в работах Х. Сеновиллы, Д.В. Алексеевского, А.С. Галаева [1–3].

В случае $k = 1$ Кахен и Уоллах показали [4], что односвязное лоренцево симметрическое пространство изометрично произведению риманова симметрического пространства и одного из следующих лоренцевых многообразий: $(\mathbb{R}, -dt^2)$, универсальной накрывающей k-мерного пространства Де Ситтера или анти-Де Ситтера $k \geq 2$, пространства Каэна - Уоллаха, то есть пространства $CW^{n+2}(A) = (\mathbb{R}^{n+2}, g)$.

Определение 1. *Гладкое полное векторное поле X на (псевдо)римановом многообразии (M, g) называется киллинговым векторным полем, если выполняется равенство $L_X g = 0$, где $L_X g$ – производная Ли метрического тензора вдоль поля X.*

Определение 2. *Гладкое полное векторное поле X на (псевдо)римановом многообразии (M, g) называется конформно киллинговым векторным полем, если выполняется равенство $L_X g = f(p) g$, где $L_X g$ – производная Ли метрического тензора вдоль поля X, $p \in M$, а $f(p)$ – гладкая вещественная функция на многообразии.*

2. Конформная деформация пространства Минковского

Рассмотрим псевдориманово пространство Де Ситтера с метрикой:

$$g = \alpha(t)((dt)^2 - \sum_{i=1}^{n}(dx)^2), \tag{2}$$

где $\alpha(t) = \frac{A}{t_0 - t}$ конформный множитель, определяемый из физических соображений работы [5]. Заметим, что метрика пространства (2) отличается от метрики пространства (1) на конформный множитель или конформное преобразование. Следовательно, достаточно найти нетривиальные решения уравнений Киллинга на пространстве Минковского и конформной деформацией обобщить их на пространство Де Ситтера.

3. Уравнение конформно киллингова векторного поля в пространстве Минковского

Рассмотрим уравнение $L_X g = fg$ в координатах пространства Минковского:

$$\begin{aligned} 2\partial_t T &= f; \\ 2\partial_i X^i &= f; \\ \partial_t X^i &= \partial_i T; \\ \partial_i X^j + \partial_j X^i &= 0, \end{aligned}$$

где T, X^i – координатные функции поля X.

Пусть $h = \frac{f}{2}$, тогда система примет вид:

$$\partial_t T = h; \tag{3}$$

$$\partial_i X^i = h; \tag{4}$$

$$\partial_t X^i = \partial_i T; \tag{5}$$

$$\partial_i X^j + \partial_j X^i = 0. \tag{6}$$

Из первых двух уравнений следует, что $\partial_t T = \partial_{x^1} X^1 = \ldots = \partial_{x^n} X^n = h$.

Составим матрицу из всех смешанных производных уравнения (5).

$$\begin{pmatrix} \partial^2_{x^1 t} X^1 & \partial^2_{x^2 t} X^1 & \ldots & \partial^2_{x^n t} X^1 \\ \partial^2_{x^1 t} X^2 & \partial^2_{x^2 t} X^2 & \ldots & \partial^2_{x^n t} X^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2_{x^1 t} X^n & \partial^2_{x^2 t} X^n & \ldots & \partial^2_{x^n t} X^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial^2_{x^1 x^1} T & \partial^2_{x^1 x^2} T & \ldots & \partial^2_{x^1 x^n} T \\ \partial^2_{x^2 x^1} T & \partial^2_{x^2 x^2} T & \ldots & \partial^2_{x^2 x^n} T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2_{x^n x^1} T & \partial^2_{x^n x^2} T & \ldots & \partial^2_{x^n x^n} T \end{pmatrix}$$

Из равенства смешанных производных вытекает, что $\partial^2_{x^1x^1}T = \partial^2_{x^2x^2}T = \ldots = \partial^2_{x^nx^n}T = \partial_v h$.

При дифференцировании уравнения (6) по v получаем $\partial^2_{x^iv}X^j = -\partial^2_{x^jv}X^i => \partial^2_{x^ix^j}T = -\partial^2_{x^jx^i}T$. Следовательно, если функции T, X^i являются линейными, а функция h постоянна, то имеем частное решение при $h = c$:

$$\begin{aligned} f &= 2c; \\ X^i &= cx^i + d_i; \\ T &= ct + d_{n+1}, \end{aligned}$$

где $d_1, d_2, ...d_{n+1} \in \mathbb{R}$.

4. Примеры киллинговых полей

В [6] построены примеры киллинговых полей для пространства $M^{1,2}$. Приведем их без доказательств. Пусть

$$\partial_t T + \partial_i X^i = 0; \tag{7}$$
$$\partial_t X^i + \partial_i T = 0, i = 1, 2; \tag{8}$$
$$\partial_i X^j + \partial_j X^i = 0, i \neq j, i, j \in \{1, 2\}. \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть заданы функции*

$$A \in C^2(\Omega_t \times \Omega_{x_1}), B \in C^2(\Omega_t \times \Omega_{x_2}), \phi \in C^2(\Omega_{x_1,x_2}),$$

такие, что A и B удовлетворяют одномерным волновым уравнениям

$$A_{tt} - A_{x_1x_1} = 0, B_{tt} - B_{x_2x_2} = 0$$

на соответствующих областях, а $\Omega_{x_1,x_2} \subset \mathbb{R}^2$ односвязна. Выберем произвольную константу $t_0 \in \Omega_t$ и определим

$$\begin{aligned} T(t, x_1, x_2) &= A(t, x_1) + B(t, x_2), \\ X^1(t, x_1, x_2) &= -\int_{t_0}^{t} A_{x_1}(s, x_1)ds + \partial_{x_1}\phi(x_1, x_2), \\ X^2(t, x_1, x_2) &= -\int_{t_0}^{t} B_{x_2}(s, x_2)ds + \partial_{x_2}\phi(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Тогда тройка (T, X^1, X^2) является классическим решением системы (7)–(9). Наоборот, всякое достаточно гладкое решение (T, X^1, X^2) системы (7)–(9) на односвязной области может быть представлено в таком виде (с точностью до добавления чисто временной функции, распределяемой между A и B).

5. Заключение

В работе исследуются конформно киллинговы векторные поля на пространстве Минковского. В дальнейшем предполагается изучить случай более высокой размерности.

Список литературы

1. Senovilla J.M. Second-order symmetric Lorentzian manifolds. I. Characterization and general results // Classical quantum gravity. — 2008. — Vol. 25, no. 24. — P. 1–25.

2. Alexeevskii D.V., Galaev A.S. Two-symmetric Lorentzian manifolds // J. Geom. Physics. — 2011. — Vol. 61, no. 12. — P. 2331–2340.

3. Galaev A.S. Classification of third-order symmetric Lorentzian manifolds // Classical quantum gravity. — 2015. — Vol. 201, no. 4. — P. 541–559.

4. Cahen M., Wallach N. Lorentzian Symmetric Spaces // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1970. — Vol. 76. — P. 585–591.

5. Мальцев В.К. Принцип существования пространства и метрика де Ситтера // ТМФ. — 1990. — Т. 83, № 3. — С. 476–479.

6. Сибирякова Т.А. Анализ системы дифференциальных уравнений первого порядка. — Барнаул, 2025.