

О вычислении тензорных полей на многообразии Кахена-Уоллаха

Григорьев Д.С.

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

danila.grigoryev.2019@mail.ru

Аннотация

Многообразия Кахена-Уоллаха представляют собой важный класс лоренцевых симметрических пространств, которые находят широкое применение в общей теории относительности и математической физике. В данной работе представлены подробные вычисления основных тензорных характеристик этих многообразий. Методом прямых вычислений в координатах, адаптированных к структуре метрики Кахена-Уоллаха, получены явные выражения для компонент тензора Римана и тензора Риччи. Исследована производная Ли метрического тензора вдоль произвольного гладкого векторного поля, что позволяет систематически изучать киллинговы и конформно киллинговы векторные поля на этих многообразиях. Приведены конкретные формулы для всех вычисленных величин в зависимости от параметров многообразия. Работа носит научно-методический характер и может служить справочным материалом для геометров и физиков-теоретиков, работающих в области лоренцевой геометрии.

Ключевые слова: Тензор Римана, тензор Риччи, производная Ли, многообразие Кахена-Уоллаха

1. Введение

Приведем некоторые необходимые определения.

Определение 1. *Псевдоримановым многообразием называется гладкое многообразие M , на котором задан гладкий невырожденный симметричный метрический тензор g . Если метрический тензор имеет сигнатуру $(1, n - 1)$, то (M, g) называется лоренцевым многообразием.*

Определение 2. *Псевдориманово многообразие (M, g) называется симметрическим порядка $k = 1$ или просто симметрическим, если $\nabla R = 0$, где R – тензор кривизны (M, g) , а ∇ – связность Леви-Чивиты.*

Кахен и Уоллах в своих работах показали [1–3], что односвязное лоренцево симметрическое пространство изометрично произведению риманова симметрического пространства и одного из следующих лоренцевых многообразий: $(\mathbb{R}, -dt^2)$, универсальной накрывающей k -мерного пространства Де Ситтера или анти-Де Ситтера ($k \geq 2$), пространства Кахена-Уоллаха.

В настоящей работе рассмотрим многообразие Кахена-Уоллаха (M, g) размерности $n + 2 \geq 5$. Выберем в $M = \mathbb{R}^{n+2}$ локальную систему координат (v, x^i, u) , где $1 \leq i \leq n$, такую, что метрика принимает следующий вид:

$$g = 2dudv + \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 + \left(\sum_{i=1}^n H_i(x^i)^2 \right) du^2,$$

где H_i – ненулевые действительные числа, определяющие геометрию многообразия.

Отметим, что исследованию пространств Кахена-Уоллаха и их обобщений посвящены работы многих математиков [4–8]. Целью данной работы является предоставление детальных вычислений компонент следующих объектов: тензора Римана (тензора кривизны), тензора Риччи, производной Ли от метрического тензора g вдоль произвольного векторного поля X : $\mathcal{L}_X g$.

Эти вычисления являются фундаментальными для дальнейшего изучения геометрии многообразий Кахена-Уоллаха, включая исследование киллинговых и конформно киллинговых векторных полей, анализ уравнений Эйнштейна и солитонов Риччи и Римана.

2. Вычисление тензорных полей на многообразии Кахена-Уоллаха

Вычисление обратного метрического тензора. Компоненты обратного метрическому тензору $g^{\mu\nu}$ определяются из условия:

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu$$

1. **Случай** $\mu = \nu = v$

$$\begin{aligned} g^{v\lambda} g_{\lambda v} &= g^{vv} g_{vv} + g^{v1} g_{1v} + \cdots + g^{vn} g_{nv} + g^{vu} g_{uv} \\ &= g^{vv} \cdot 0 + g^{v1} \cdot 0 + \cdots + g^{vn} \cdot 0 + g^{vu} \cdot 1 = g^{vu} = \delta_v^v = 1 \\ &\Rightarrow g^{vu} = 1 \end{aligned}$$

2. **Случай** $\mu = v, \nu = u$

$$\begin{aligned} g^{v\lambda} g_{\lambda u} &= g^{vv} g_{vu} + g^{v1} g_{1u} + \cdots + g^{vn} g_{nu} + g^{vu} g_{uu} \\ &= g^{vv} \cdot 1 + g^{v1} \cdot 0 + \cdots + g^{vn} \cdot 0 + g^{vu} \cdot H \\ &= g^{vv} + H \cdot g^{vu} = \delta_u^v = 0 \\ &\Rightarrow g^{vv} + H \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow g^{vv} = -H \end{aligned}$$

3. **Случай** $\mu = v, \nu = k$ (пространственные координаты)

$$\begin{aligned} g^{v\lambda} g_{\lambda k} &= g^{vv} g_{vk} + g^{v1} g_{1k} + \cdots + g^{vk} g_{kk} + \cdots + g^{vn} g_{nk} + g^{vu} g_{uk} \\ &= g^{vv} \cdot 0 + g^{v1} \cdot 0 + \cdots + g^{vk} \cdot 1 + \cdots + g^{vn} \cdot 0 + g^{vu} \cdot 0 \\ &= g^{vk} = \delta_k^v = 0 \quad \Rightarrow g^{vk} = 0 \end{aligned}$$

4. **Случай** $\mu = u, \nu = v$

$$\begin{aligned} g^{u\lambda} g_{\lambda v} &= g^{uv} g_{vv} + g^{u1} g_{1v} + \cdots + g^{un} g_{nv} + g^{uu} g_{uv} \\ &= g^{uv} \cdot 0 + g^{u1} \cdot 0 + \cdots + g^{un} \cdot 0 + g^{uu} \cdot 1 = g^{uu} = \delta_v^u = 0 \\ &\Rightarrow g^{uu} = 0 \end{aligned}$$

5. **Случай** $\mu = u, \nu = u$

$$\begin{aligned} g^{u\lambda} g_{\lambda u} &= g^{uv} g_{vu} + g^{u1} g_{1u} + \cdots + g^{un} g_{nu} + g^{uu} g_{uu} \\ &= g^{uv} \cdot 1 + g^{u1} \cdot 0 + \cdots + g^{un} \cdot 0 + g^{uu} \cdot H \\ &= g^{uv} + H \cdot g^{uu} = \delta_u^u = 1 \\ &\Rightarrow g^{uv} + H \cdot 0 = 1 \quad \Rightarrow g^{uv} = 1 \end{aligned}$$

6. Случай $\mu = u, \nu = k$ (пространственные координаты)

$$\begin{aligned}
g^{u\lambda} g_{\lambda k} &= g^{uv} g_{vk} + g^{u1} g_{1k} + \dots + g^{uk} g_{kk} + \dots + g^{un} g_{nk} + g^{uu} g_{uk} \\
&= g^{uv} \cdot 0 + g^{u1} \cdot 0 + \dots + g^{uk} \cdot 1 + \dots + g^{un} \cdot 0 + g^{uu} \cdot 0 \\
&= g^{uk} = \delta_k^u = 0 \quad \Rightarrow g^{uk} = 0
\end{aligned}$$

7. Случай $\mu = i, \nu = j$ (пространственные координаты)

$$\begin{aligned}
g^{i\lambda} g_{\lambda j} &= g^{iv} g_{vj} + g^{i1} g_{1j} + \dots + g^{ij} g_{jj} + \dots + g^{in} g_{nj} + g^{iu} g_{uj} \\
&= g^{iv} \cdot 0 + g^{i1} \cdot \delta_{1j} + \dots + g^{ij} \cdot 1 + \dots + g^{in} \cdot \delta_{nj} + g^{iu} \cdot 0 \\
&= g^{ij} = \delta_j^i \quad \Rightarrow g^{ij} = \delta_j^i
\end{aligned}$$

8. Случай $\mu = i, \nu = v$

$$\begin{aligned}
g^{i\lambda} g_{\lambda v} &= g^{iv} g_{vv} + g^{i1} g_{1v} + \dots + g^{in} g_{nv} + g^{iu} g_{uv} \\
&= g^{iv} \cdot 0 + g^{i1} \cdot 0 + \dots + g^{in} \cdot 0 + g^{iu} \cdot 1 \\
&= g^{iu} = \delta_v^i = 0 \quad \Rightarrow g^{iu} = 0
\end{aligned}$$

9. Случай $\mu = i, \nu = u$

$$\begin{aligned}
g^{i\lambda} g_{\lambda u} &= g^{iv} g_{vu} + g^{i1} g_{1u} + \dots + g^{in} g_{nu} + g^{iu} g_{uu} \\
&= g^{iv} \cdot 1 + g^{i1} \cdot 0 + \dots + g^{in} \cdot 0 + g^{iu} \cdot H \\
&= g^{iv} + H \cdot g^{iu} = \delta_u^i = 0 \quad \Rightarrow g^{iv} + H \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow g^{iv} = 0
\end{aligned}$$

Итоговый результат для обратного метрического тензора (в матричной форме)

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -H & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

где $H = \sum_{i=1}^n H_i (x^i)^2$.

Вычисления символов Кристоффеля. Символы Кристоффеля вычисляются по формуле:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_{\mu} g_{\rho\nu} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu})$$

Ненулевые производные метрики $g_{\mu\nu}$: $\partial_k g_{uu} = \partial_k H = 2H_k x^k$ для $k = 1, \dots, n$. Все остальные производные равны нулю.

1. Символы с $\sigma = v$

- $\mu = v, \nu = v$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{vv}^v &= \frac{1}{2} g^{v\rho} (\partial_v g_{\rho v} + \partial_v g_{\rho v} - \partial_{\rho} g_{vv}) \\
&= \frac{1}{2} g^{v\rho} (0 + 0 - 0) = 0 \quad \Rightarrow \Gamma_{vv}^v = 0
\end{aligned}$$

- $\mu = v, \nu = i$

$$\begin{aligned}\Gamma_{vi}^v &= \frac{1}{2}g^{v\rho}(\partial_v g_{\rho i} + \partial_i g_{\rho v} - \partial_\rho g_{vi}) \\ &= \frac{1}{2}g^{v\rho}(0 + 0 - 0) = 0 \quad \Rightarrow \Gamma_{vi}^v = 0\end{aligned}$$

- $\mu = v, \nu = u$

$$\begin{aligned}\Gamma_{vu}^v &= \frac{1}{2}g^{v\rho}(\partial_v g_{\rho u} + \partial_u g_{\rho v} - \partial_\rho g_{vu}) \\ &= \frac{1}{2}g^{v\rho}(0 + 0 - 0) = 0 \quad \Rightarrow \Gamma_{vu}^v = 0\end{aligned}$$

- $\mu = i, \nu = j$

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^v &= \frac{1}{2}g^{v\rho}(\partial_i g_{\rho j} + \partial_j g_{\rho i} - \partial_\rho g_{ij}) \\ &= \frac{1}{2}[g^{vv}(\partial_i g_{vj} + \partial_j g_{vi} - \partial_v g_{ij}) + g^{vu}(\partial_i g_{uj} + \partial_j g_{ui} - \partial_u g_{ij})] \\ &= \frac{1}{2}[(-H)(0 + 0 - 0) + 1 \cdot (0 + 0 - 0)] = 0 \quad \Rightarrow \Gamma_{ij}^v = 0\end{aligned}$$

- $\mu = i, \nu = u$

$$\begin{aligned}\Gamma_{iu}^v &= \frac{1}{2}g^{v\rho}(\partial_i g_{\rho u} + \partial_u g_{\rho i} - \partial_\rho g_{iu}) \\ &= \frac{1}{2}[g^{vv}(\partial_i g_{vu} + \partial_u g_{vi} - \partial_v g_{iu}) + g^{vu}(\partial_i g_{uu} + \partial_u g_{ui} - \partial_u g_{iu})] \\ &= \frac{1}{2}[(-H)(\partial_i 1 + 0 - 0) + 1 \cdot (\partial_i H + 0 - 0)] \\ &= \frac{1}{2}[0 + 2H_i x^i] = H_i x^i \quad \Rightarrow \Gamma_{iu}^v = H_i x^i\end{aligned}$$

- $\mu = u, \nu = u$

$$\begin{aligned}\Gamma_{uu}^v &= \frac{1}{2}g^{v\rho}(2\partial_u g_{\rho u} - \partial_\rho g_{uu}) \\ &= \frac{1}{2}[g^{vv}(2\partial_u g_{vu} - \partial_v g_{uu}) + g^{vu}(2\partial_u g_{uu} - \partial_u g_{uu})] \\ &= \frac{1}{2}[(-H)(2 \cdot 0 - 0) + 1 \cdot (2\partial_u H - \partial_u H)] \\ &= \frac{1}{2}[0 + \partial_u H] = 0 \quad \Rightarrow \Gamma_{uu}^v = 0\end{aligned}$$

2. Символы с $\sigma = k$ (пространственные координаты)

- $\mu = v, \nu = v$

$$\begin{aligned}\Gamma_{vv}^k &= \frac{1}{2}g^{k\rho}(\partial_v g_{\rho v} + \partial_v g_{\rho v} - \partial_\rho g_{vv}) \\ &= \frac{1}{2}g^{k\rho}(0 + 0 - 0) = 0 \quad \Rightarrow \Gamma_{vv}^k = 0\end{aligned}$$

- $\mu = v, \nu = i$

$$\begin{aligned}\Gamma_{vi}^k &= \frac{1}{2}g^{k\rho}(\partial_v g_{\rho i} + \partial_i g_{\rho v} - \partial_\rho g_{vi}) \\ &= \frac{1}{2}g^{kk}(\partial_v g_{ki} + \partial_i g_{kv} - \partial_k g_{vi}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (0 + 0 - 0) = 0 \quad \Rightarrow \Gamma_{vi}^k = 0\end{aligned}$$

- $\mu = v, \nu = u$

$$\begin{aligned}\Gamma_{vu}^k &= \frac{1}{2}g^{k\rho}(\partial_v g_{\rho u} + \partial_u g_{\rho v} - \partial_\rho g_{vu}) \\ &= \frac{1}{2}g^{kk}(\partial_v g_{ku} + \partial_u g_{kv} - \partial_k g_{vu}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (0 + 0 - \partial_k 1) = 0 \quad \Rightarrow \Gamma_{vu}^k = 0\end{aligned}$$

- $\mu = i, \nu = j$

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}g^{k\rho}(\partial_i g_{\rho j} + \partial_j g_{\rho i} - \partial_\rho g_{ij}) \\ &= \frac{1}{2}g^{kk}(\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (\partial_i \delta_{kj} + \partial_j \delta_{ki} - \partial_k \delta_{ij}) = 0 \quad \Rightarrow \Gamma_{ij}^k = 0\end{aligned}$$

- $\mu = i, \nu = u$

$$\begin{aligned}\Gamma_{iu}^k &= \frac{1}{2}g^{k\rho}(\partial_i g_{\rho u} + \partial_u g_{\rho i} - \partial_\rho g_{iu}) \\ &= \frac{1}{2}g^{kk}(\partial_i g_{ku} + \partial_u g_{ki} - \partial_k g_{iu}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (0 + 0 - 0) = 0 \quad \Rightarrow \Gamma_{iu}^k = 0\end{aligned}$$

- $\mu = u, \nu = u$

$$\begin{aligned}\Gamma_{uu}^k &= \frac{1}{2}g^{k\rho}(2\partial_u g_{\rho u} - \partial_\rho g_{uu}) \\ &= \frac{1}{2}g^{kk}(2\partial_u g_{ku} - \partial_k g_{uu}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (0 - \partial_k H) = -\frac{1}{2} \cdot 2H_k x^k = -H_k x^k \quad \Rightarrow \Gamma_{uu}^k = -H_k x^k\end{aligned}$$

3. Символы с $\sigma = u$

- $\mu = v, \nu = v$

$$\begin{aligned}\Gamma_{vv}^u &= \frac{1}{2}g^{u\rho}(\partial_v g_{\rho v} + \partial_v g_{\rho v} - \partial_\rho g_{vv}) \\ &= \frac{1}{2}g^{u\rho}(0 + 0 - 0) = 0 \quad \Rightarrow \Gamma_{vv}^u = 0\end{aligned}$$

- $\mu = v, \nu = i$

$$\begin{aligned}\Gamma_{vi}^u &= \frac{1}{2}g^{u\rho}(\partial_v g_{\rho i} + \partial_i g_{\rho v} - \partial_\rho g_{vi}) \\ &= \frac{1}{2}[g^{uv}(\partial_v g_{vi} + \partial_i g_{vv} - \partial_v g_{vi}) + g^{uu}(\partial_v g_{ui} + \partial_i g_{uv} - \partial_u g_{vi})] \\ &= \frac{1}{2}[1 \cdot (0 + 0 - 0) + 0 \cdot (0 + 0 - 0)] = 0 \quad \Rightarrow \Gamma_{vi}^u = 0\end{aligned}$$

- $\mu = v, \nu = u$

$$\begin{aligned}\Gamma_{vu}^u &= \frac{1}{2}g^{u\rho}(\partial_v g_{\rho u} + \partial_u g_{\rho v} - \partial_\rho g_{vu}) \\ &= \frac{1}{2}[g^{uv}(\partial_v g_{vu} + \partial_u g_{vv} - \partial_v g_{vu}) + g^{uu}(\partial_v g_{uu} + \partial_u g_{uv} - \partial_u g_{vu})] \\ &= \frac{1}{2}[1 \cdot (\partial_v 1 + 0 - \partial_v 1) + 0 \cdot (0 + 0 - 0)] = 0 \quad \Rightarrow \Gamma_{vu}^u = 0\end{aligned}$$

- $\mu = i, \nu = j$

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^u &= \frac{1}{2}g^{u\rho}(\partial_i g_{\rho j} + \partial_j g_{\rho i} - \partial_\rho g_{ij}) \\ &= \frac{1}{2}[g^{uv}(\partial_i g_{vj} + \partial_j g_{vi} - \partial_v g_{ij}) + g^{uu}(\partial_i g_{uj} + \partial_j g_{ui} - \partial_u g_{ij})] \\ &= \frac{1}{2}[1 \cdot (0 + 0 - 0) + 0 \cdot (0 + 0 - 0)] = 0 \quad \Rightarrow \Gamma_{ij}^u = 0\end{aligned}$$

- $\mu = i, \nu = u$

$$\begin{aligned}\Gamma_{iu}^u &= \frac{1}{2}g^{u\rho}(\partial_i g_{\rho u} + \partial_u g_{\rho i} - \partial_\rho g_{iu}) \\ &= \frac{1}{2}[g^{uv}(\partial_i g_{vu} + \partial_u g_{vi} - \partial_v g_{iu}) + g^{uu}(\partial_i g_{uu} + \partial_u g_{ui} - \partial_u g_{iu})] \\ &= \frac{1}{2}[1 \cdot (\partial_i 1 + 0 - 0) + 0 \cdot (\partial_i H + 0 - 0)] = 0 \quad \Rightarrow \Gamma_{iu}^u = 0\end{aligned}$$

- $\mu = u, \nu = u$

$$\begin{aligned}\Gamma_{uu}^u &= \frac{1}{2}g^{u\rho}(2\partial_u g_{\rho u} - \partial_\rho g_{uu}) \\ &= \frac{1}{2}[g^{uv}(2\partial_u g_{vu} - \partial_v g_{uu}) + g^{uu}(2\partial_u g_{uu} - \partial_u g_{uu})] \\ &= \frac{1}{2}[1 \cdot (2 \cdot 0 - 0) + 0 \cdot (2\partial_u H - \partial_u H)] = 0 \quad \Rightarrow \Gamma_{uu}^u = 0\end{aligned}$$

Итоговый результат для символов Кристоффеля

$$\begin{aligned}\Gamma_{iu}^v &= \Gamma_{ui}^v = H_i x^i \\ \Gamma_{uu}^k &= -H_k x^k \\ \text{Все остальные } \Gamma_{\mu\nu}^\sigma &= 0\end{aligned}$$

где $i, k = 1, \dots, n$.

Вычисление компонент тензора Римана. Формула для нахождения компонент тензора Римана:

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$$

Ненулевые символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{iu}^v = \Gamma_{ui}^v = H_i x^i, \quad \Gamma_{uu}^i = -H_i x^i$$

1. Компоненты с $\rho = v$

- $\sigma = v$

- (a) $\mu = v, \nu = v$

$$R_{vvv}^v = \partial_v \Gamma_{vv}^v - \partial_v \Gamma_{vv}^v + \Gamma_{v\lambda}^v \Gamma_{vv}^\lambda - \Gamma_{v\lambda}^v \Gamma_{vv}^\lambda = 0 \quad \Rightarrow R_{vvv}^v = 0$$

- (b) $\mu = v, \nu = i$

$$R_{vvi}^v = \partial_v \Gamma_{iv}^v - \partial_i \Gamma_{vv}^v + \Gamma_{v\lambda}^v \Gamma_{iv}^\lambda - \Gamma_{i\lambda}^v \Gamma_{vv}^\lambda = 0 \quad \Rightarrow R_{vvi}^v = 0$$

- (c) $\mu = v, \nu = u$

$$R_{vvu}^v = \partial_v \Gamma_{uv}^v - \partial_u \Gamma_{vv}^v + \Gamma_{v\lambda}^v \Gamma_{uv}^\lambda - \Gamma_{u\lambda}^v \Gamma_{vv}^\lambda = 0 \quad \Rightarrow R_{vvu}^v = 0$$

(d) $\mu = i, \nu = j$

$$R_{vij}^v = \partial_i \Gamma_{jv}^v - \partial_j \Gamma_{iv}^v + \Gamma_{i\lambda}^v \Gamma_{jv}^\lambda - \Gamma_{j\lambda}^v \Gamma_{iv}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{vij}^v = 0$$

(e) $\mu = i, \nu = u$

$$R_{vii}^v = \partial_i \Gamma_{uv}^v - \partial_u \Gamma_{iv}^v + \Gamma_{i\lambda}^v \Gamma_{uv}^\lambda - \Gamma_{u\lambda}^v \Gamma_{iv}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{vii}^v = 0$$

(f) $\mu = u, \nu = i$

$$R_{vui}^v = \partial_u \Gamma_{iv}^v - \partial_i \Gamma_{uv}^v + \Gamma_{u\lambda}^v \Gamma_{iv}^\lambda - \Gamma_{i\lambda}^v \Gamma_{uv}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{vui}^v = 0$$

(g) $\mu = u, \nu = u$

$$R_{vuu}^v = \partial_u \Gamma_{uv}^v - \partial_u \Gamma_{uv}^v + \Gamma_{u\lambda}^v \Gamma_{uv}^\lambda - \Gamma_{u\lambda}^v \Gamma_{uv}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{vuu}^v = 0$$

• $\sigma = i$ (a) $\mu = v, \nu = j$

$$R_{ivj}^v = \partial_v \Gamma_{ji}^v - \partial_j \Gamma_{vi}^v + \Gamma_{v\lambda}^v \Gamma_{ji}^\lambda - \Gamma_{j\lambda}^v \Gamma_{vi}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{ivj}^v = 0$$

(b) $\mu = u, \nu = j$

$$\begin{aligned} R_{iuj}^v &= \partial_u \Gamma_{ji}^v - \partial_j \Gamma_{ui}^v + \Gamma_{u\lambda}^v \Gamma_{ji}^\lambda - \Gamma_{j\lambda}^v \Gamma_{ui}^\lambda \\ &= 0 - \partial_j (H_i x^i) + 0 - 0 = -H_i \delta_{ij} \Rightarrow R_{iuj}^v = -H_i \delta_{ij} \end{aligned}$$

(c) $\mu = j, \nu = u$

$$\begin{aligned} R_{iju}^v &= \partial_j \Gamma_{ui}^v - \partial_u \Gamma_{ji}^v + \Gamma_{j\lambda}^v \Gamma_{ui}^\lambda - \Gamma_{u\lambda}^v \Gamma_{ji}^\lambda \\ &= \partial_j (H_i x^i) - 0 + 0 - 0 = H_i \delta_{ij} \Rightarrow R_{iju}^v = H_i \delta_{ij} \end{aligned}$$

(d) $\mu = u, \nu = v$

$$R_{iuv}^v = \partial_u \Gamma_{vi}^v - \partial_v \Gamma_{ui}^v + \Gamma_{u\lambda}^v \Gamma_{vi}^\lambda - \Gamma_{v\lambda}^v \Gamma_{ui}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{iuv}^v = 0$$

(e) $\mu = u, \nu = u$

$$R_{iuu}^v = \partial_u \Gamma_{ui}^v - \partial_u \Gamma_{ui}^v + \Gamma_{u\lambda}^v \Gamma_{ui}^\lambda - \Gamma_{u\lambda}^v \Gamma_{ui}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{iuu}^v = 0$$

• $\sigma = u$ (a) $\mu = v, \nu = j$

$$R_{uvj}^v = \partial_v \Gamma_{ju}^v - \partial_j \Gamma_{vu}^v + \Gamma_{v\lambda}^v \Gamma_{ju}^\lambda - \Gamma_{j\lambda}^v \Gamma_{vu}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{uvj}^v = 0$$

(b) $\mu = u, \nu = j$

$$R_{uuj}^v = \partial_u \Gamma_{ju}^v - \partial_j \Gamma_{uu}^v + \Gamma_{u\lambda}^v \Gamma_{ju}^\lambda - \Gamma_{j\lambda}^v \Gamma_{uu}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{uuj}^v = 0$$

(c) $\mu = i, \nu = j$

$$\begin{aligned} R_{uij}^v &= \partial_i \Gamma_{ju}^v - \partial_j \Gamma_{iu}^v + \Gamma_{i\lambda}^v \Gamma_{ju}^\lambda - \Gamma_{j\lambda}^v \Gamma_{iu}^\lambda \\ &= \partial_i (H_j x^j) - \partial_j (H_i x^i) + 0 - 0 = H_j \delta_{ij} - H_i \delta_{ji} = 0 \Rightarrow R_{uij}^v = 0 \end{aligned}$$

(d) $\mu = i, \nu = v$

$$R_{uiv}^v = \partial_i \Gamma_{vu}^v - \partial_v \Gamma_{iu}^v + \Gamma_{i\lambda}^v \Gamma_{vu}^\lambda - \Gamma_{v\lambda}^v \Gamma_{iu}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{uiv}^v = 0$$

(e) $\mu = i, \nu = u$

$$R_{uiu}^v = \partial_i \Gamma_{uu}^v - \partial_u \Gamma_{iu}^v + \Gamma_{i\lambda}^v \Gamma_{uu}^\lambda - \Gamma_{u\lambda}^v \Gamma_{iu}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{uiu}^v = 0$$

2. Компоненты с $\rho = k$ (пространственные координаты)

• $\sigma = v$ (a) $\mu = v, \nu = v$

$$R_{vvv}^k = \partial_v \Gamma_{vv}^k - \partial_v \Gamma_{vv}^k + \Gamma_{v\lambda}^k \Gamma_{vv}^\lambda - \Gamma_{v\lambda}^k \Gamma_{vv}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{vvv}^k = 0$$

(b) $\mu = v, \nu = i$

$$R_{vvi}^k = \partial_v \Gamma_{iv}^k - \partial_i \Gamma_{vv}^k + \Gamma_{v\lambda}^k \Gamma_{iv}^\lambda - \Gamma_{i\lambda}^k \Gamma_{vv}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{vvi}^k = 0$$

(c) $\mu = v, \nu = u$

$$R_{vvu}^k = \partial_v \Gamma_{uv}^k - \partial_u \Gamma_{vv}^k + \Gamma_{v\lambda}^k \Gamma_{uv}^\lambda - \Gamma_{u\lambda}^k \Gamma_{vv}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{vvu}^k = 0$$

(d) $\mu = i, \nu = j$

$$R_{vij}^k = \partial_i \Gamma_{jv}^k - \partial_j \Gamma_{iv}^k + \Gamma_{i\lambda}^k \Gamma_{jv}^\lambda - \Gamma_{j\lambda}^k \Gamma_{iv}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{vij}^k = 0$$

(e) $\mu = i, \nu = u$

$$R_{vii}^k = \partial_i \Gamma_{uv}^k - \partial_u \Gamma_{iv}^k + \Gamma_{i\lambda}^k \Gamma_{uv}^\lambda - \Gamma_{u\lambda}^k \Gamma_{iv}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{vii}^k = 0$$

(f) $\mu = u, \nu = i$

$$R_{vui}^k = \partial_u \Gamma_{iv}^k - \partial_i \Gamma_{uv}^k + \Gamma_{u\lambda}^k \Gamma_{iv}^\lambda - \Gamma_{i\lambda}^k \Gamma_{uv}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{vui}^k = 0$$

(g) $\mu = u, \nu = u$

$$R_{vuu}^k = \partial_u \Gamma_{uv}^k - \partial_u \Gamma_{uv}^k + \Gamma_{u\lambda}^k \Gamma_{uv}^\lambda - \Gamma_{u\lambda}^k \Gamma_{uv}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{vuu}^k = 0$$

• $\sigma = i$ (a) $\mu = v, \nu = j$

$$R_{ivj}^k = \partial_v \Gamma_{ji}^k - \partial_j \Gamma_{vi}^k + \Gamma_{v\lambda}^k \Gamma_{ji}^\lambda - \Gamma_{j\lambda}^k \Gamma_{vi}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{ivj}^k = 0$$

(b) $\mu = u, \nu = j$

$$R_{iuj}^k = \partial_u \Gamma_{ji}^k - \partial_j \Gamma_{ui}^k + \Gamma_{u\lambda}^k \Gamma_{ji}^\lambda - \Gamma_{j\lambda}^k \Gamma_{ui}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{iuj}^k = 0$$

(c) $\mu = j, \nu = u$

$$R_{iju}^k = \partial_j \Gamma_{ui}^k - \partial_u \Gamma_{ji}^k + \Gamma_{j\lambda}^k \Gamma_{ui}^\lambda - \Gamma_{u\lambda}^k \Gamma_{ji}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{iju}^k = 0$$

(d) $\mu = u, \nu = v$

$$R_{iuv}^k = \partial_u \Gamma_{vi}^k - \partial_v \Gamma_{ui}^k + \Gamma_{u\lambda}^k \Gamma_{vi}^\lambda - \Gamma_{v\lambda}^k \Gamma_{ui}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{iuv}^k = 0$$

(e) $\mu = u, \nu = u$

$$R_{iuu}^k = \partial_u \Gamma_{ui}^k - \partial_u \Gamma_{ui}^k + \Gamma_{u\lambda}^k \Gamma_{ui}^\lambda - \Gamma_{u\lambda}^k \Gamma_{ui}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{iuu}^k = 0$$

- $\sigma = u$

(a) $\mu = v, \nu = j$

$$R_{uvj}^k = \partial_v \Gamma_{ju}^k - \partial_j \Gamma_{vu}^k + \Gamma_{v\lambda}^k \Gamma_{ju}^\lambda - \Gamma_{j\lambda}^k \Gamma_{vu}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{uvj}^k = 0$$

(b) $\mu = u, \nu = j$

$$R_{uuj}^k = \partial_u \Gamma_{ju}^k - \partial_j \Gamma_{uu}^k + \Gamma_{u\lambda}^k \Gamma_{ju}^\lambda - \Gamma_{j\lambda}^k \Gamma_{uu}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{uuj}^k = 0$$

(c) $\mu = i, \nu = j$

$$R_{uij}^k = \partial_i \Gamma_{ju}^k - \partial_j \Gamma_{iu}^k + \Gamma_{i\lambda}^k \Gamma_{ju}^\lambda - \Gamma_{j\lambda}^k \Gamma_{iu}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{uij}^k = 0$$

(d) $\mu = i, \nu = v$

$$R_{uiv}^k = \partial_i \Gamma_{vu}^k - \partial_v \Gamma_{iu}^k + \Gamma_{i\lambda}^k \Gamma_{vu}^\lambda - \Gamma_{v\lambda}^k \Gamma_{iu}^\lambda = 0 \Rightarrow R_{uiv}^k = 0$$

(e) $\mu = i, \nu = u$

$$\begin{aligned} R_{uiu}^k &= \partial_i \Gamma_{uu}^k - \partial_u \Gamma_{iu}^k + \Gamma_{i\lambda}^k \Gamma_{uu}^\lambda - \Gamma_{u\lambda}^k \Gamma_{iu}^\lambda \\ &= \partial_i(-H_k x^k) - 0 + 0 - 0 = -H_k \delta_{ki} \Rightarrow R_{uiu}^k = -H_k \delta_{ki} \end{aligned}$$

(f) $\mu = u, \nu = i$

$$\begin{aligned} R_{uui}^k &= \partial_u \Gamma_{iu}^k - \partial_i \Gamma_{uu}^k + \Gamma_{u\lambda}^k \Gamma_{iu}^\lambda - \Gamma_{i\lambda}^k \Gamma_{uu}^\lambda \\ &= 0 - (-H_k \delta_{ki}) + 0 - 0 = H_k \delta_{ki} \Rightarrow R_{uui}^k = H_k \delta_{ki} \end{aligned}$$

3. Компоненты с $\rho = u$

- $\sigma = v$

(a) Все компоненты $R_{v\mu\nu}^u = 0$, так как все $\Gamma_{..}^u = 0$

- $\sigma = i$

(a) Все компоненты $R_{i\mu\nu}^u = 0$, так как все $\Gamma_{..}^u = 0$

- $\sigma = u$

(a) Все компоненты $R_{u\mu\nu}^u = 0$, так как все $\Gamma_{..}^u = 0$

Итоговый результат для тензора Римана

$$\begin{aligned} R_{iuj}^v &= -H_i \delta_{ij}, & R_{iju}^v &= H_i \delta_{ij}, \\ R_{uiu}^k &= -H_k \delta_{ki}, & R_{uui}^k &= H_k \delta_{ki}, \end{aligned}$$

для $i, j, k = 1, \dots, n$.

Все остальные компоненты $R_{\sigma\mu\nu}^\rho$ равны нулю.

Вычисление компонент тензора Риччи. Тензор Риччи определяется сверткой тензора Римана:

$$R_{\sigma\nu} = R_{\sigma\rho\nu}^\rho$$

1. $\sigma = v, \nu = v$

$$R_{vv} = R_{v\rho v}^\rho = R_{vvv}^v + \sum_{k=1}^n R_{vkv}^k + R_{vuv}^u = 0 \Rightarrow R_{vv} = 0$$

2. $\sigma = v, \nu = i$

$$R_{vi} = R_{v\rho i}^\rho = R_{vvi}^v + \sum_{k=1}^n R_{vki}^k + R_{vui}^u = 0 \Rightarrow R_{vi} = 0$$

3. $\sigma = v, \nu = u$

$$R_{vu} = R_{v\rho u}^\rho = R_{vvu}^v + \sum_{k=1}^n R_{vku}^k + R_{vuu}^u = 0 \Rightarrow R_{vu} = 0$$

4. $\sigma = i, \nu = v$

$$R_{iv} = R_{i\rho v}^\rho = R_{ivv}^v + \sum_{k=1}^n R_{ikv}^k + R_{iuv}^u = 0 \Rightarrow R_{iv} = 0$$

5. $\sigma = i, \nu = j$

$$R_{ij} = R_{i\rho j}^\rho = R_{ivj}^v + \sum_{k=1}^n R_{ikj}^k + R_{iuj}^u = 0 \Rightarrow R_{ij} = 0$$

6. $\sigma = i, \nu = u$

$$R_{iu} = R_{i\rho u}^\rho = R_{ivu}^v + \sum_{k=1}^n R_{iku}^k + R_{iuu}^u = 0 \Rightarrow R_{iu} = 0$$

7. $\sigma = u, \nu = v$

$$R_{uv} = R_{u\rho v}^\rho = R_{uvv}^v + \sum_{k=1}^n R_{ukv}^k + R_{uuv}^u = 0 \Rightarrow R_{uv} = 0$$

8. $\sigma = u, \nu = i$

$$R_{ui} = R_{u\rho i}^\rho = R_{uvi}^v + \sum_{k=1}^n R_{uki}^k + R_{uui}^u = 0 \Rightarrow R_{ui} = 0$$

9. $\sigma = u, \nu = u$

$$R_{uu} = R_{u\rho u}^\rho = R_{uvu}^v + \sum_{k=1}^n R_{uku}^k + R_{uuu}^u$$

Вычислим R_{uku}^k :

$$\begin{aligned} R_{uku}^k &= \partial_k \Gamma_{uu}^k - \partial_u \Gamma_{ku}^k + \Gamma_{k\lambda}^k \Gamma_{uu}^\lambda - \Gamma_{u\lambda}^k \Gamma_{ku}^\lambda \\ &= \partial_k (-H_k x^k) - 0 + 0 - 0 = -H_k \end{aligned}$$

Таким образом:

$$R_{uu} = \sum_{k=1}^n (-H_k) = - \sum_{k=1}^n H_k \Rightarrow R_{uu} = - \sum_{k=1}^n H_k$$

Итоговый результат для тензора Риччи

В матричной форме:

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\sum_{k=1}^n H_k \end{pmatrix}$$

Вычисление производной Ли для метрики Кахена-Уоллаха

Векторное поле:

$$Y = V(v, x, u)\partial_v + \sum_{i=1}^n X^i(v, x, u)\partial_i + U(v, x, u)\partial_u$$

Компоненты производной Ли. Формула для вычисления производной Ли:

$$(\mathcal{L}_Y g)_{\mu\nu} = Y^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} + g_{\mu\lambda} \partial_\nu Y^\lambda + g_{\lambda\nu} \partial_\mu Y^\lambda$$

1. Компонента $(\mathcal{L}_Y g)_{vv}$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_Y g)_{vv} &= Y^\lambda \partial_\lambda g_{vv} + g_{v\lambda} \partial_v Y^\lambda + g_{\lambda v} \partial_v Y^\lambda \\ &= 0 + 2 \cdot (g_{v\lambda} \partial_v Y^\lambda) \\ &= 2 \cdot (g_{vu} \partial_v Y^u) = 2\partial_v U \quad \Rightarrow (\mathcal{L}_Y g)_{vv} = 2\partial_v U \end{aligned}$$

2. Компонента $(\mathcal{L}_Y g)_{vi}$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_Y g)_{vi} &= Y^\lambda \partial_\lambda g_{vi} + g_{v\lambda} \partial_i Y^\lambda + g_{\lambda i} \partial_v Y^\lambda \\ &= 0 + g_{vu} \partial_i Y^u + g_{ii} \partial_v Y^i \\ &= \partial_i U + \partial_v X^i \quad \Rightarrow (\mathcal{L}_Y g)_{vi} = \partial_i U + \partial_v X^i \end{aligned}$$

3. Компонента $(\mathcal{L}_Y g)_{vu}$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_Y g)_{vu} &= Y^\lambda \partial_\lambda g_{vu} + g_{v\lambda} \partial_u Y^\lambda + g_{\lambda u} \partial_v Y^\lambda \\ &= 0 + g_{vu} \partial_u Y^u + g_{vu} \partial_v Y^v + g_{uu} \partial_v Y^u \\ &= \partial_u U + \partial_v V + H \partial_v U \quad \Rightarrow (\mathcal{L}_Y g)_{vu} = \partial_u U + \partial_v V + H \partial_v U \end{aligned}$$

4. Компонента $(\mathcal{L}_Y g)_{ij}$ при $i \neq j$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_Y g)_{ij} &= Y^\lambda \partial_\lambda g_{ij} + g_{i\lambda} \partial_j Y^\lambda + g_{\lambda j} \partial_i Y^\lambda \\ &= 0 + g_{ii} \partial_j Y^i + g_{jj} \partial_i Y^j \\ &= \partial_j X^i + \partial_i X^j \quad \Rightarrow (\mathcal{L}_Y g)_{ij} = \partial_j X^i + \partial_i X^j \end{aligned}$$

5. Компонента $(\mathcal{L}_Y g)_{ii}$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_Y g)_{ii} &= Y^\lambda \partial_\lambda g_{ii} + g_{i\lambda} \partial_i Y^\lambda + g_{\lambda i} \partial_i Y^\lambda \\ &= 0 + 2 \cdot (g_{ii} \partial_i Y^i) = 2\partial_i X^i \quad \Rightarrow (\mathcal{L}_Y g)_{ii} = 2\partial_i X^i \end{aligned}$$

6. Компонента $(\mathcal{L}_Y g)_{iu}$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_Y g)_{iu} &= Y^\lambda \partial_\lambda g_{iu} + g_{i\lambda} \partial_u Y^\lambda + g_{\lambda u} \partial_i Y^\lambda \\
&= 0 + g_{ii} \partial_u Y^i + g_{vu} \partial_i Y^v + g_{uu} \partial_i Y^u \\
&= \partial_u X^i + \partial_i V + H \partial_i U \quad \Rightarrow (\mathcal{L}_Y g)_{iu} = \partial_u X^i + \partial_i V + H \partial_i U
\end{aligned}$$

7. Компонента $(\mathcal{L}_Y g)_{uu}$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_Y g)_{uu} &= Y^\lambda \partial_\lambda g_{uu} + g_{u\lambda} \partial_u Y^\lambda + g_{\lambda u} \partial_u Y^\lambda \\
&= \sum_{k=1}^n X^k \cdot 2H_k x^k + 2 \cdot (g_{u\lambda} \partial_u Y^\lambda) \\
&= 2 \sum_{k=1}^n H_k x^k X^k + 2(g_{uv} \partial_u Y^v + g_{uu} \partial_u Y^u) \\
&= 2 \sum_{k=1}^n H_k x^k X^k + 2(\partial_u V + H \partial_u U) \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\mathcal{L}_Y g)_{uu} = 2 \sum_{k=1}^n H_k x^k X^k + 2(\partial_u V + H \partial_u U)
\end{aligned}$$

3. Заключение

В данной работе представлены подробные вычисления основных тензорных характеристик многообразия Кахена-Уоллаха. Полученные результаты имеют как теоретическое значение для понимания геометрической структуры многообразий Кахена-Уоллаха, так и практическую ценность для дальнейших исследований киллинговых и конформно-киллинговых полей, а также солитонов и потоков Римана и Риччи.

Список литературы

1. Cahen M., Wallach N. Lorentzian Symmetric Spaces // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1970. — Vol. 76, no. 3. — P. 585–591.
2. Cahen M., Kerbray Y. Champs de Vecteurs Conformes et Transformations Conformes des Espaces Lorentziens Symétriques // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. — 1978. — Vol. 57, no. 2. — P. 99–132.
3. Cahen M., Kerbray Y. Transformations Conformes des Espaces Symétriques Pseudoriemanniens // Annali di Matematica Pura ed Applicata. — 1982. — Vol. 132. — P. 275–289.
4. Alekseevski D. Self-similar Lorentzian Manifolds // [Annals of Global Analysis and Geometry](#). — 1985. — Vol. 3, no. 1. — P. 59–84.
5. Frances C. About Pseudo-Riemannian Lichnerowicz Conjecture // [Transformation Groups](#). — 2015. — Vol. 20, no. 4. — P. 1015–1022.
6. Kath I., Olbrich M. Compact Quotients of Cahen-Wallach Spaces // [Memoirs of the American Mathematical Society](#). — 2019. — Vol. 262, no. 1264. — P. 84.
7. Kühnel W., Rademacher H. Essential Conformal Fields in Pseudo-Riemannian Geometry // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. — 1995. — Vol. 74, no. 5. — P. 453–481.

-
8. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. Солитоны Риччи и поля Киллинга на обобщенных многообразиях Кахена–Уоллаха // Сибирский математический журнал. — 2019. — Т. 60, № 5. — С. 1165–1170.