УДК 514.765

О вычислении полей Киллинга на трехмерных метрических унимодулярных группах Ли

Родионов Е.Д., Орлова Е.С.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
edr2002@mail.ru, orlova2002.ru@gmail.com

Аннотация

Исследованию (конформно) киллинговых векторных полей на римановых многообразиях посвящены работы многих математиков [1-4]. В [3] изучалась геометрия трехмерных метрических групп Ли, а в [1] изучалась связь между (конформно) киллинговыми векторными полями и конформными деформациями римановых метрик. В данной статье исследуются векторные поля Киллинга на трехмерных унимодулярных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

Ключевые слова: Трехмерные унимодулярные группы Ли, левоинвариантные римановы метрики, векторные поля Киллинга

1. Введение

Пусть G – трехмерная унимодулярная группа Ли. Тогда в алгебре Ли группы G существует положительно ориентированный ортобазис $\{E_1, E_2, E_3\}$, или базис Джона Милнора, такой, что [1]:

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= \lambda_3 E_3, \\ [E_2, E_3] &= \lambda_1 E_1, \\ [E_3, E_1] &= \lambda_2 E_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – структурные константы алгебры Ли $L(G)$.

Определение 1. *Гладкое полное векторное поле X на римановом многообразии (M, g) называется киллинговым векторным полем, если выполняется равенство:*

$$L_X g = 0, \tag{2}$$

где $L_X g$ – производная Ли метрического тензора вдоль поля X.

В случае метрических групп Ли приведем уравнение Киллинга к виду удобному для вычислений.

Найдем производную Ли левоинвариантных векторных полей $K, X, Y \in L(G)$ – алгебре Ли группы G. Имеем: $L_K g(X, Y) = Kg(X, Y) + g([X, K], Y) + g([Y, K], X)$, и т.к. поля K, X, Y и метрика g левоинвариантны, то $Kg(X, Y) = 0$, а значит $L_K g(X, Y) = g([X, K], Y) + g([Y, K], X)$. Далее, в локальной системе координат алгебры Ли $L(G)$ имеем: $K = K^s E_s$, $X = X^i E_i$, $Y = Y^j E_j$, $L_K g(X, Y) = g([X^i E_i, K^s E_s], Y^j E_j) + g([Y^j E_j, K^s E_s], X^i E_i) = X^i K^s Y^j g([E_i, E_s], E_j) + Y^j K^s X^i g([E_j, E_s], E_i) = X^i K^s Y^j g(c_{is}^a E_a], E_j) + Y^j K^s X^i g(c_{js}^b E_b, E_i) = X^i K^s Y^j c_{is}^a g_{aj} +$

$Y^j K^s X^i c_{js}^b g_{bi}$, откуда немедленно получаем систему уравнений для нахождения полей Киллинга на метрической группе Ли:

$$X^i K^s Y^j c_{is}^a g_{aj} + Y^j K^s X^i c_{js}^b gbi = 0 \tag{3}$$

Как видим, левая часть зависит от структурных констант алгебры Ли и компонент метрического тензора. В дальнейшем, при вычислениях, не ограничивая общности рассуждений, будем предполагать векторные поля X, Y базисными, и переобозначим поле K.

2. Программы в среде SageMath для вычисления векторных полей Киллинга

В данной работе для вычисления координат полей Киллинга использовался математический пакет SageMath. Он позволяет задать структурные константы трёхмерных унимодулярных групп Ли, автоматически сформировать соответствующую систему уравнений Киллинга и найти её решения в символьном виде.

Расчёты выполнялись в интерактивном блокноте Jupyter Notebook, где код и поясняющий текст размещаются в отдельных ячейках, а текстовые ячейки с разметкой Markdown позволяют удобно оформлять заголовки, формулы и комментарии к каждому фрагменту программы. Использование языка Python в SageMath даёт возможность автоматизировать решение систем уравнений Киллинга для всех рассматриваемых типов групп и получать компактные формулы для координат левоинвариантных полей Киллинга.

Далее приводится код для вычисления полей Киллинга.

Код программы

```
# Создаём символьные переменные для структурных констант
# и координат поля Киллинга
lambda1, lambda2, lambda3 = var("lambda1, lambda2, lambda3", domain ='real')
x1, x2, x3 = var("x1, x2, x3", domain='real')
r6 = var("r6", domain='real')
Signs = [[lambda1, lambda2, lambda3],[lambda1, lambda2, -1*lambda3],
         [lambda1, lambda2,0],[lambda1, -1*lambda2,0],[lambda1,0,0],[0,0,0]]
Group = ['SU(2) или SO(3)','SL(2,R) или O(1,2)','E(2)','E(1,1)','H','R+R+R']

# Функция структурных констант Const => Const[k][i][j]
def structural_constants(lambda):
    const = [[[ 0 for k in range(3)] for j in range(3)] for i in range(3)]
    c_sign= [[[ 0 for k in range(3)] for j in range(3)] for i in range(3)]
    c_sign[0][1][2] = c_sign[1][2][0] = c_sign[2][0][1] =  1
    c_sign[0][2][1] = c_sign[1][0][2] = c_sign[2][1][0] = -1
    for k in range(3):
        for i in range(3):
            for j in range(3):
                const[k][i][j] = c_sign[i][j][k] * lambda[k]
    return const

# Список координат
X =[x1,x2,x3]
# Метрический тензор 3x3
g = [[1 if i == j else 0 for j in range(3)] for i in range(3)]
```

```
#Функция получения системы уравнения
def system_solution(const):
    system_1 = []
    system_2 = []

    for k in range(3):
        sum1 = 0
        for t in range(3):
            for i in range(3):
                for s in range(3):
                    sum1 += const[t][i][k]*X[i]*g[t][s]
        system_1.append(sum1)

    for s in range(3):
        sum2 = 0
        for m in range(3):
            for i in range(3):
                for k in range(3):
                    sum2 += const[m][i][s]*X[i]*g[k][m]
        system_2.append(sum2)

    system = [
        system_1[i] + system_2[j]
        for i in range(len(system_1))
        for j in range(len(system_2))
    ]
    return system

#Функция удаления дубликактов
def duplicate(system):
    new_system = []
    for eq in system:
        if eq not in new_system:
            new_system.append(eq)
    return new_system

#Функция для вывода координат Киллиногово поля для групп
def killing_fields(lambda, Group):
    if all(l == 0 for l in lambda):
        show(
            f"Координаты Киллингового поля для группы {Group} : ",
            [[x1 == r6, x2 == r6, x3 == r6]]
        )
    else:
        const = structural_constants(lambda)
        system = list(set(system_solution(const)))

        for i in range(len(system)):
            print(f"Уравнение {i+1}: {system[i]} = 0")
```

```
        Coord = solve(system,x1,x2,x3)
        show(f"Координаты Киллиногово поля для группы {Group} : ", Coord)
        print("------------------------------------")

for i in range(6):
    killing_fields(Signs[i],Group[i])
```

3. Результаты вычислений полей Киллинга

В случае унимодулярных трёхмерных метрических групп Ли система уравнений Киллинга была найдена и решена для некоторых групп Ли.

1. Группа $SU(2)$ или $SO(3)$.

При $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, +, +)$ уравнения Киллинга имеют вид

$$\begin{cases} 2X_3\lambda_2 - 2X_2\lambda_3 & = 0, \\ -X_3\lambda_1 + X_3\lambda_2 + X_1\lambda_3 - X_2\lambda_3 & = 0, \\ X_2\lambda_1 - X_1\lambda_2 + X_3\lambda_2 - X_2\lambda_3 & = 0, \\ -2X_3\lambda_1 + 2X_1\lambda_3 & = 0, \\ X_2\lambda_1 - X_3\lambda_1 - X_1\lambda_2 + X_1\lambda_3 & = 0, \\ 2X_2\lambda_1 - 2X_1\lambda_2 & = 0. \end{cases}$$

Координаты Киллингового поля:

$$\left[X_1 = \frac{r_1\lambda_1}{\lambda_3}, \quad X_2 = \frac{r_1\lambda_2}{\lambda_3}, \quad X_3 = r_1 \right]$$

2. Группа $SL(2, \mathbb{R})$ или $O(1, 2)$.

При $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, +, -)$ уравнения Киллинга имеют вид

$$\begin{cases} 2X_3\lambda_2 + 2X_2\lambda_3 & = 0, \\ -X_3\lambda_1 + X_3\lambda_2 - X_1\lambda_3 + X_2\lambda_3 & = 0, \\ X_2\lambda_1 - X_1\lambda_2 + X_3\lambda_2 + X_2\lambda_3 & = 0, \\ -2X_3\lambda_1 - 2X_1\lambda_3 & = 0, \\ X_2\lambda_1 - X_3\lambda_1 - X_1\lambda_2 - X_1\lambda_3 & = 0, \\ 2X_2\lambda_1 - 2X_1\lambda_2 & = 0. \end{cases}$$

Координаты Киллингового поля:

$$\left[X_1 = -\frac{r_2\lambda_1}{\lambda_3}, \quad X_2 = -\frac{r_2\lambda_2}{\lambda_3}, \quad X_3 = r_2 \right]$$

3. Группа $E(2)$.

При $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, +, 0)$ уравнения Киллинга имеют вид

$$\begin{cases} 2X_3\lambda_2 & = 0, \\ -X_3\lambda_1 + X_3\lambda_2 & = 0, \\ X_2\lambda_1 - X_1\lambda_2 + X_3\lambda_2 & = 0, \\ -2X_3\lambda_1 & = 0, \\ X_2\lambda_1 - X_3\lambda_1 - X_1\lambda_2 & = 0, \\ 2X_2\lambda_1 - 2X_1\lambda_2 & = 0. \end{cases}$$

Координаты Киллингового поля:

$$\left[X_1 = \frac{r_3\lambda_1}{\lambda_2}, \quad X_2 = r_3, \quad X_3 = 0\right]$$

4. Группа $E(1,1)$.
При $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, -, 0)$ уравнения Киллинга имеют вид

$$\begin{cases} -2X_3\lambda_2 & = 0, \\ -X_3\lambda_1 - X_3\lambda_2 & = 0, \\ X_2\lambda_1 + X_1\lambda_2 - X_3\lambda_2 & = 0, \\ -2X_3\lambda_1 & = 0, \\ X_2\lambda_1 - X_3\lambda_1 + X_1\lambda_2 & = 0, \\ 2X_2\lambda_1 + 2X_1\lambda_2 & = 0. \end{cases}$$

Координаты Киллингового поля:

$$\left[X_1 = -\frac{r_4\lambda_1}{\lambda_2}, \quad X_2 = r_4, \quad X_3 = 0\right]$$

5. Группа Гейзенберга H.
При $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, 0, 0)$ уравнения Киллинга имеют вид

$$\begin{cases} -X_3\lambda_1 & = 0, \\ X_2\lambda_1 & = 0, \\ -2X_3\lambda_1 & = 0, \\ X_2\lambda_1 - X_3\lambda_1 & = 0, \\ 2X_2\lambda_1 & = 0. \end{cases}$$

Координаты Киллингового поля:

$$[X_1 = r_5, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0]$$

6. Абелева группа $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.
При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ система уравнений Киллинга вырождается в тождество $0 = 0$ и не задаёт никаких условий на компоненты векторного поля, поэтому любое левоинвариантное векторное поле является полем Киллинга.
Координаты Киллингового поля:

$$[X_1 = r_6, \quad X_2 = r_6, \quad X_3 = r_6]$$

4. Заключение

В данной работе построен алгоритм для вычисления векторных полей Киллинга на трехмерных унимодулярных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой. В дальнейшем предполагается изучить неунимодулярный случай.

Список литературы

1. Rodionov E.D., Slavsky V.V. Conformal deformation of the Riemannian metrics and homogenious Riemannian spaces // Comm. Math. Univ. Carolinae. — 2002. — Vol. 43, no. 2.

2. Бессе А. Многообразия Эйнштейна: в 2 т.: пер. с англ. — М., 1990.

3. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. — 1976. — Vol. 21.

4. Oskorbin D.N., Rodionov E.D. Ricci solitons and Killing fields on generalized Cahen–Wallach manifolds // Siberian Math. J. — 2019. — Vol. 60, no. 5. — P. 911–915.