УДК 517

Геометрический факультатив-практикум в научно-исследовательской работе старшеклассников и студентов младших курсов

Саженков А.Н., Саженкова Т.В., Плотникова Е.А.
Алтайский государственный университет,
Новосибирский государственный технический университет
sazhenkov_an@mail.ru, pselena@gmail.com

Аннотация

В работе осуществляется представление задач творческого характера, решение которых направлено на развитие аналитических качеств и способствующих самостоятельному продвижению учащихся в исследовательской работе.

Решение геометрических задач даёт замечательную возможность выработки у учащихся хорошего, логического и последовательного мышления. Геометрия – это большая игра по определённым аксиоматическим правилам, отражающим определённые закономерности окружающего мира. Решение геометрических задач может объединять в себе несколько соображений-идей – очень редко содержательная задача решается “в один ход”. На таких примерах полезно показывать учащимся, что – это общий принцип решения задач. Последовательное увеличение количества условий и требований к рассматриваемым объектам позволяет демонстрировать востребованность ранее полученных результатов и изученных методов исследования [1–4].

Рассмотрим возможности последовательного вовлечения участников практикума в такую исследовательскую работу на примере ряда задач по геометрии прямых на плоскости.

В начале работы легко решается следующая задача о расположении прямых на плоскости

Задача 1. На плоскости расположено множество, состоящее из нескольких прямых. Известно, что для любых трёх из них найдётся точка, через которую проходят эти три прямые. Докажите, что для всех прямых найдётся точка, через которую все они проходят.

В далее следующей задаче при аналогичном подходе к решению возникает ряд случаев различного взаимного расположения точек пересечения прямых.

Задача 2. На плоскости расположено множество, состоящее из нескольких попарно пересекающихся прямых. Известно, что для любой точки пересечения двух прямых найдётся третья прямая, проходящая через эту точку пересечения. Докажите, что для всех прямых найдётся точка, через которую все они проходят.

Решение. Допустим, что не все прямые проходят через одну точку. Тогда найдутся три прямые попарно пересекающиеся в трёх разных точках.

Рассмотрим одну из них – прямую a. Выберем точку A, находящуюся на минимальном (положительном) расстоянии от прямой a и являющуюся пересечением прямых b и c. Обозначим точки пересечения прямых b и c с прямой a через C и B. По условию, найдётся третья прямая d, проходящая через точку пересечения прямых b и c. Обозначим точку пересечения прямых a и d через P.

Случай 1. Точка P лежит внутри отрезка BC. По условию, найдётся третья прямая e, проходящая через точку P. Тогда эта прямая пересекается с одним из двух отрезков AB или AC, причём точка пересечения X отлична от точки A. В обоих случаях получаем точку X, находящуюся на меньшем расстоянии от прямой a, чем точка A.

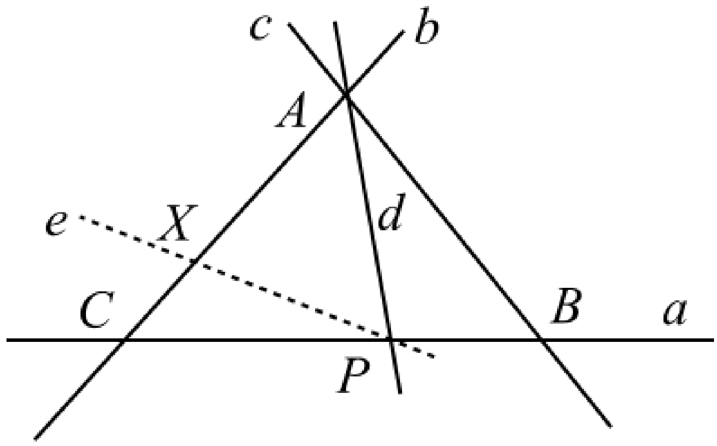

Рисунок 1. Случай 1

Случай 2. Точка P лежит вне отрезка BC. Считаем, что точка B лежит между точками P и C. По условию, найдётся третья прямая e, проходящая через точку P. Тогда эта прямая пересекается с одним из двух отрезков AP или AC, причём точка пересечения X отлична от точки A. В обоих случаях получаем точку X, находящуюся на меньшем расстоянии от прямой a, чем точка A.

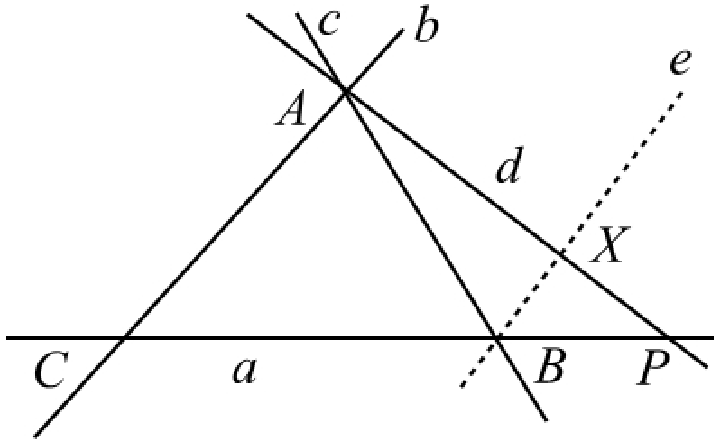

Рисунок 2. Случай 2

В обоих случаях получили противоречие.

Переходим к задаче 3, где увеличивается количество прямых, удовлетворяющих требованиям условий.

Задача 3. На плоскости расположено пять прямых. Известно, что для любых четырёх из них найдутся две точки, через которые проходят эти четыре прямые. Верно ли, что для всех пяти прямых найдутся две точки, через которую все они проходят?

Ответ: Нет.

Решение. На рисунке 3 представлен пример.

Во-первых, поскольку никакие три прямые не проходят через одну точку, через любые две точки проходит не более четырёх прямых. Во-вторых, рассмотрим любые четыре из пяти прямых. Из соображений симметрии, можно считать, что рассматриваются все прямые, кроме прямой a. Очевидно, что эти четыре прямые проходят через точки X и Y.

В следующей задаче условия ещё более усугубляются.

Задача 4. На плоскости расположено шесть прямых. Известно, что для любых пяти из них найдутся две точки, через которые проходят эти пять прямых. Верно ли, что для всех шести прямых найдутся две точки, через которую все они проходят?

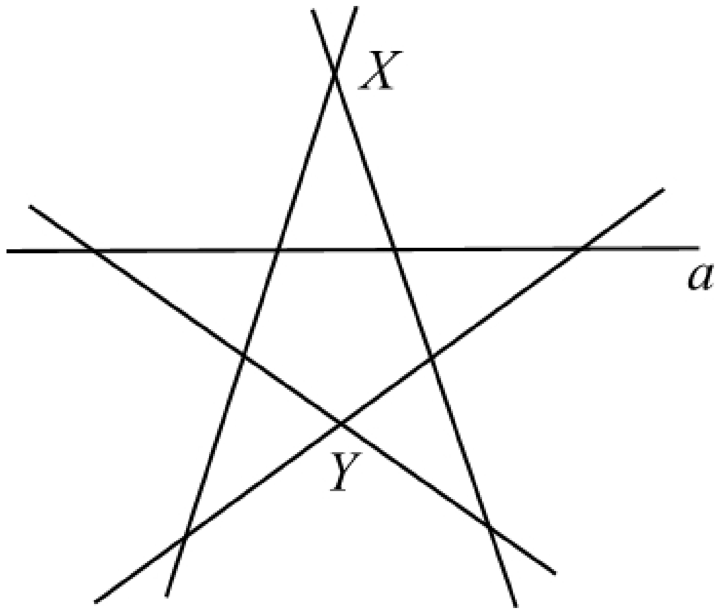

Рисунок 3. Пример к задаче 3

Ответ: Нет.

Решение. На рисунке 4 представлен пример (здесь прямые c и d – параллельны).

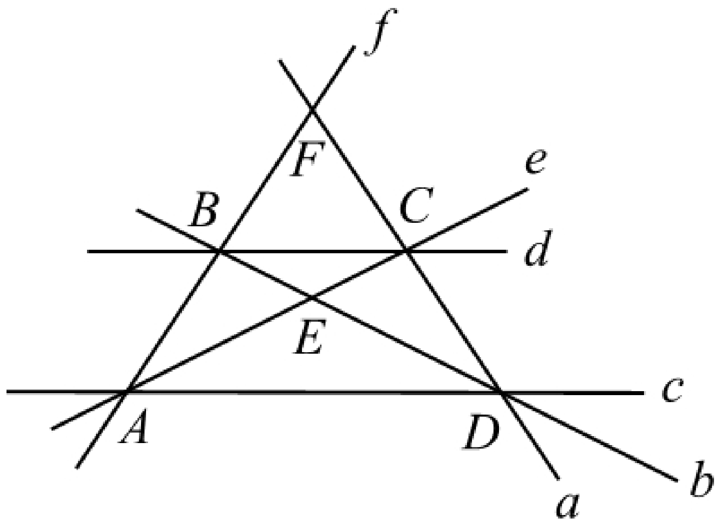

Рисунок 4. Пример к задаче 4

Заметим, что нет точек X и Y, через которые проходят все шесть прямых. В силу параллельности прямых c и d, точки X и Y должны находиться на разных прямых. Из соображений симметрии, можно считать, что $X = A$. Поскольку прямые a и d не проходят через точку A, необходимо, чтобы $Y = C$, но тогда прямая b не проходит через X и Y. Теперь отметим, что через точки A и B проходят все прямые кроме прямой a. Остальные случаи: b и A, C; c и B, C; d и A, D; e и B, D; f и C, D.

И, наконец, дабы не сложилось отрицательного впечатления от постоянного ответа "нет"

Задача 5. На плоскости расположено множество, состоящее из нескольких прямых. Известно, что для любых шести из них найдутся две точки, через которые проходят эти шесть прямых. Верно ли, что для всех прямых найдутся две точки, через которую все они проходят?

Ответ: Да, верно.

Во-первых, очевидно, что найдутся три прямые, проходящие через одну точку. Обозначим a, b, c – три прямые, проходящие через точку A, а все прямые, не проходящие через эту точку L. Если множество L состоит из одной прямой или из двух пересекающихся прямых, то задача решена.

Лемма. Пусть выделено шесть прямых, среди которых присутствуют прямые a, b, c. Тогда одной из двух точек P и Q, через которые проходят эти шесть прямых является точка A.

Действительно, поскольку три прямые a, b, c проходят через две точки P и Q, по крайней мере, две из них проходят через одну из этих точек. Будем считать, что эта точка P. Тогда, очевидно, $P = A$. Лемма доказана.

Допустим теперь, что множество L состоит из двух, параллельных прямых e и f (не проходящих через точку A). Рассмотрим шесть прямых данного множества: a, b, c, d, e, f. В силу леммы и условия задачи эти шесть прямых проходят через точку A и некоторую точку Q. Следовательно, точка Q должна находиться на двух параллельных прямых e и f. Противоречие.

Теперь множество L состоит не менее чем из трёх прямых. Взяв любые три из них x, y, z, и тройку a, b, c, из леммы замечаем, что прямые x, y, z пересекаются в одной точке.

Список литературы

1. Плотникова Е.А., Саженков А.Н., Саженкова Т.В. Математический анализ в задачах студенческих олимпиад. Практикум. — Барнаул : Изд-во АлтГУ, 2011.

2. Саженков А.Н. Геометрия и анализ в задачах математических олимпиад // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. — Барнаул : Изд-во АлтГУ, 2013.

3. Саженков А.Н., Саженкова Т.В. О некоторых аспектах подготовки к студенческим математическим соревнованиям // Сборник трудов тринадцатой региональной конференции по математике МАК 2010. — Барнаул : Изд-во АлтГУ, 2010.

4. Саженков А.Н., Саженкова Т.В. Дополнительное математическое образование как средство развития творческого потенциала студентов и школьников // Сборник научных статей международной школы-семинара “Ломоносовские чтения на Алтае”. — Барнаул : Изд-во АлтГУ, 2011.